

Math. ^P
425 ^k

Math. P.

425 k

Pietzker

Die
Gestaltung des Raumes.

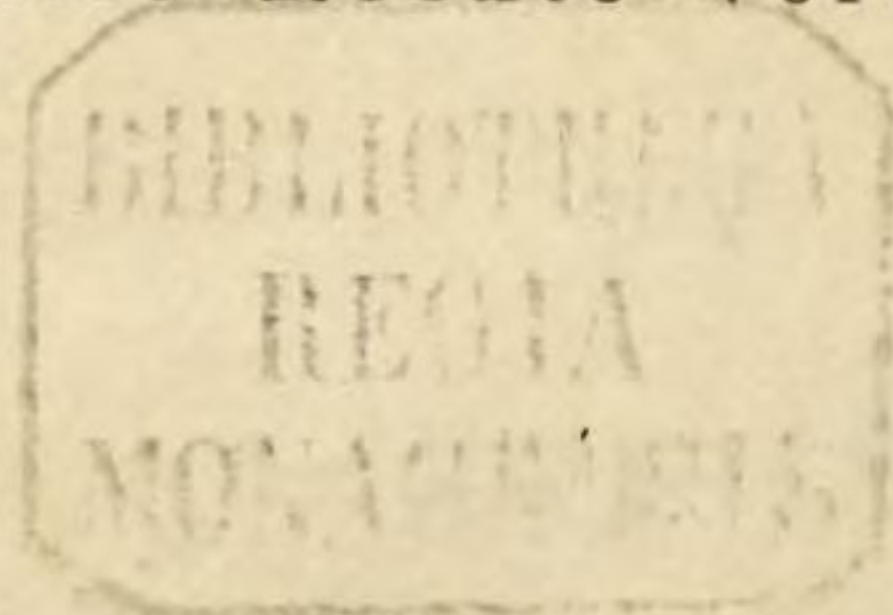
Kritische Untersuchungen
über
die Grundlagen der Geometrie.

Von
F. Pietzker,
Oberlehrer am Gymnasium zu Nordhausen.

Mit 10 Figuren im Text.

Braunschweig.
Verlag von Otto Salle.
1891.

Alle Rechte vorbehalten.



Vorwort.

Den Inhalt der nachfolgenden Abhandlung bildet die Widerlegung der Ansicht, dass unser Raum nach Dimensionszahl und innerer Structur anders gestaltet sein könne, als es die uns aus dem Altertum überlieferte und bis auf *Gauss* auch nicht ernstlich angezweifelte Geometrie thatsächlich angenommen hat. Ich rechne bei meinen Darlegungen auf die Zustimmung der, wie ich vermute, nicht unbeträchtlichen Zahl von Fachgenossen, denen die neue Lehre trotz der grossen Namen ihrer Vertreter niemals hat wirklich einleuchten wollen. Ich wage es aber auch zu hoffen, dass durch meine Beweisführung manche Anhänger der neuen Raumanschauung sich überzeugen lassen werden, der vorurteilslosen Prüfung derselben erlaube ich mir zunächst besonders den zweiten Abschnitt meiner Schrift zu empfehlen. Dort habe ich die Consequenzen, zu denen die nichteuclidische Theorie bei Festhaltung des Prinzips von der überall gleichmässigen Gestaltung des Raumes führt, unter Anwendung ganz spezieller, meines Wissens neuer, mathematischer Argumente bis auf einen Punkt getrieben, dass die Entscheidung für oder gegen das altüberlieferte geometrische System — wie ich sagen zu dürfen glaube — in der That auf eines Messers Schneide gestellt ist. Die eingehende Durchführung, welche ich dem Beweisverfahren dort und auch noch an einigen anderen Stellen gegeben habe, wird, wie ich hoffe, durch die Natur der Streitfrage ihre Rechtfertigung finden.

Im Übrigen bildet diese Verfolgung einer, wenngleich noch so bedeutsamen und wesentlichen Einzelheit nicht den Schwerpunkt der vorliegenden Untersuchung. Für mich persönlich ist die Unhaltbarkeit der nichteuclidischen Geometrie bereits durch die im ersten Abschnitt dieser Schrift näher dargelegten Bedenken völlig nachgewiesen, ich möchte auch annehmen, dass dies für einen jeden zutrifft, in dessen Augen die Untersuchung über die geo-

metrischen Axiome nicht als ein Tummelplatz für Umformungen und Constructionen, sondern als das, was sie ihrem Wesen nach ist, nämlich eine Erörterung von Prinzipienfragen erscheint. Aber das Hauptgewicht lege ich, wie der Leser selbst erkennen wird, auf die systematischen Ausführungen der beiden letzten Abschnitte, in denen ich die Auffassung der Geometrie als einer Erfahrungswissenschaft widerlege, um von dem so gewonnenen Standpunkte aus die Fundamentalsätze der euklidischen Geometrie als das natürliche Ergebnis weniger ganz allgemeiner Prinzipien von allseitig anerkannter aprioristischer Gültigkeit zu erweisen. Unter anderem glaube ich im letzten Abschnitt meiner Untersuchung den wahren Kern der Gründe aufgezeigt zu haben, aus denen eine andere als die dreifache Ausdehnung des Raumes völlig undenkbar ist.

Auf Anführungen aus der — mir übrigens nur unvollständig bekannten — einschlägigen Fachliteratur, soweit dieselbe den speziellen Ausbau der neuen Lehre zum Inhalt hat, glaubte ich im Allgemeinen verzichten zu dürfen. Der allgemeine Charakter, den meine Arbeit durchweg bewahrt, gestattete mir, mich auf die allgemein bekannten, einer besonderen Berufung nicht bedürfenden Hauptsätze der von mir bekämpften Theorien zu beschränken. Nur die Abhandlungen von *Helmholtz*, *Riemann* und *Beltrami* habe ich einer eingehenderen Besprechung unterzogen, die den ganzen dritten Abschnitt meiner Schrift ausfüllt, aber auch noch in den vierten und selbst in den fünften hinübergreift. Die Rechtfertigung dieses Verfahrens ergibt sich aus der grundlegenden Bedeutung, welche den eben gedachten Arbeiten von den Vertretern der neueren Theorien durchweg beigelegt wird. Hinsichtlich der *Beltramischen* Arbeiten habe ich dabei zu bemerken, dass mir dieselben nicht im Original, sondern in der von *Hoüel* besorgten französischen Übersetzung (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*; tome VI, 1869) vorgelegen haben; auf diese Übersetzung beziehen sich alle meine Ausführungen.

Die Entschiedenheit des sachlichen Widerspruchs, den ich gegen die von *Gauss*, *Riemann* und *Helmholtz* verkündigten Anschauungen erhebe, ändert selbstverständlich nichts an der Bewunderung, die ich den epochemachenden wissenschaftlichen Leistungen dieser ausgezeichneten Männer im Übrigen bereitwilligst zolle. Ich darf mir in dieser Hinsicht die Worte aneignen, die *Helmholtz* selbst in der Vorrede zu seiner Übersetzung von Thom-

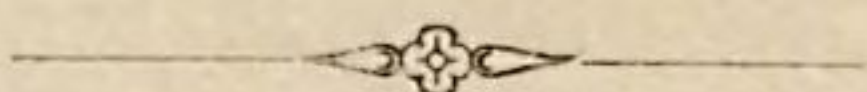
sons und Tait's Treatise on Natural Philosophy, Teil II, gesprochen hat: „Wir sind, denke ich, in Deutschland noch nicht dahin gekommen und werden hoffentlich nie dahin kommen, dass Hypothesen, wenn sie auch von einem noch so hochverdienten Manne aufgestellt worden sind, nicht kritisirt werden dürften.“ Allerdings aber, glaube ich, liegt bei der von den genannten Forschern mit dem ganzen Gewicht ihrer Namen gestützten Behauptung, dass die Axiome der Geometrie ohne Hinzunahme der Erfahrung nicht begründet werden können, die Sache ähnlich wie bei der von Newton seinerzeit verfochtenen Emissionstheorie des Lichtes: durch die Autorität so grosser Männer ist die Herrschaft des Irrtums begünstigt worden.

Alle Einzelheiten, die meiner Auseinandersetzung die Übersichtlichkeit zu rauben drohten, habe ich in eine Reihe von Anmerkungen am Schluss verwiesen. Von den aufgestellten Formeln drückt nur ein Teil meine eigene Meinung aus, andere habe ich nur angeführt oder auch selbst gebildet, um ihre Unmöglichkeit nachzuweisen; doch habe ich es für zweckmässig gehalten, auf diesen Unterschied bei der Numerirung keine Rücksicht zu nehmen, ein entsprechendes Verfahren habe ich bei den wenigen von mir gegebenen Figuren beobachtet.

Auf den Standpunkt der von mir bekämpften Anschauung habe ich mich im Interesse der Kürze des Ausdrucks auch bei der Wahl des Titels für meine Schrift gestellt. Denn allerdings besteht deren Inhalt gerade in dem Nachweise, dass von einer durch irgend welche veränderlichen Umstände (wie etwa das Krümmungsmaass) bedingten *Gestaltung* in Wahrheit beim Raum nicht die Rede sein kann.

Nordhausen, April 1891.

Der Verfasser.



Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
I. Bedenkliche Folgen der nichteuklidischen Geometrie	6
II. Unvereinbarkeit der nichteuklidischen Geometrie mit dem Prinzip der überall gleichmässigen Gestaltung des Raumes	13
III. Über die Beweiskraft der Raumtheorien von Helmholtz, Riemann und Beltrami	29
IV. Zusammenhang der nichteuklidischen Geometrie mit der Frage nach der Dimensionszahl des Raumes.	51
V. Widerlegung der Möglichkeit, die geometrischen Axiome auf die Er- fahrung zu basiren	68
VI. Directe Begründung der euklidischen Geometrie des dreifach ausge- dehnten Raumes	82
Anmerkungen.	105

Einleitung.

Seit geraumer Zeit ist gerade in den Kreisen der angesehensten Mathematiker eine Theorie über die Grundlagen der Geometrie zur Herrschaft gelangt, des Inhalts, dass der uns aus dem Altertum überlieferte Satz, welcher der Winkelsumme des ebenen Dreiecks die Grösse von zwei Rechten zuschreibt, nur darum bisher keinen genügenden Beweis gefunden habe, weil er überhaupt keine apodiktische Wahrheit besitze — es sei vollkommen möglich, auf die Annahme eines kleineren Wertes für die gedachte Winkelsumme eine in sich widerspruchsfreie Geometrie aufzubauen. Ob innerhalb des uns zugänglichen Raumes die altüberlieferte, der euklidischen Geometrie zu Grunde liegende Annahme gültig sei oder nicht, das könne nur durch die Erfahrung entschieden werden, dabei sei jedoch zu bemerken, dass die aus den bisherigen Beobachtungen sich ergebende Übereinstimmung zwischen der euklidischen Theorie und den thatsächlichen Verhältnissen möglicherweise nur eine scheinbare sei, weil innerhalb des uns zugänglichen Raumes vermöge der relativ geringen Ausdehnung desselben die Abweichung des wahren Sachverhalts von der euklidischen Annahme sich denkbarer Weise in zu geringem Grade bemerkbar mache, um scharf nachgewiesen werden zu können.

Diese Lehre, als deren eigentlicher Urheber *Gauss* anzusehen ist, hat in der Folge zunächst durch einige Schüler von *Gauss*, die beiden Ungarn *W. und J. Bolyai* und den Russen *Lobatschewsky* eine Durchführung erhalten, die als Leistung menschlichen Scharfsinnes ohne Frage hohe Bewunderung verdient. Die Arbeiten der genannten Gelehrten sind dann von anderen Mathematikern aufgenommen, der allgemeinen Kenntniss zugänglich gemacht und im

Einzelnen mannigfach weiter fortgeführt worden. Die gedachte Theorie, die von ihren Urhebern selbst als *nichteuklidische* oder auch, da sie angeblich die euklidische Lehre als möglichen Spezialfall in sich schliesst, als *absolute Geometrie* bezeichnet wird, fand hiebei von zwei Seiten her eine mächtige Unterstützung. Einmal zeigte nämlich der Professor an der Universität Bologna *E. Beltrami*¹⁾, dass durch die Sätze der nichteuklidischen Geometrie gewisse auf den Flächen von constanter negativer Krümmung gültige Beziehungen ihren exakten Ausdruck finden, andererseits führte *B. Riemann*²⁾ für die Unbeweisbarkeit der euklidischen Gestaltung des Raumes ganz neue z. T. in der *Gauss'schen* Flächentheorie wurzelnde Gesichtspunkte ein, indem er als charakteristisches Kennzeichen der verschiedenen denkbaren Raumformen einen nach Art des *Gauss'schen Krümmungsmaasses* für die Flächen gebildeten algebraischen Ausdruck aufstellte. Unter Benutzung der Riemannschen Theorie gab dann alsbald *Beltrami*³⁾, in dessen Ausführungen ja ebenfalls das Krümmungsmaass eine bedeutsame Rolle spielte, eine ganz allgemein gehaltene Erweiterung seiner eben erwähnten Interpretation der nichteuklidischen Geometrie, während unter zustimmender Berufung auf Riemann und Beltrami mit gewissen Erörterungen von teilweise stark naturwissenschaftlicher Färbung auch *Helmholtz*⁴⁾ in aller Entschiedenheit für die neue Lehre eintrat.

Von dem Begriff des Krümmungsmaasses als einer Eigenschaft des Raumes, der seitdem ein Bürgerrecht innerhalb der mathematischen Welt besitzt, zog nun den entschiedensten Nutzen eine weitere, in noch viel schärferer Weise mit allen uns geläufigen Anschauungen brechende, übrigens ebenfalls auf *Gauss'schen* Ideen aufgebaute Lehre, die nämlich, dass ebenso wie die uns geläufige innere Structur, so auch die von uns allgemein angenommene dreifache Ausdehnung des Raumes eine bloß empirische Gewissheit besitze, dass es durchaus kein Bedenken habe, die Möglichkeit mehrfach ausgedehnter Räume anzunehmen, zu denen der uns vertraute Raum sich verhalte, wie innerhalb dieses Raumes eine (zweifach ausgedehnte) Fläche zu dem Raum im Ganzen. Die Unfähigkeit, von solchen Räumen eine Vorstellung zu gewinnen, beweise nichts als die Unvollkommenheit unseres Geistes. Wie eng in der That diese Theorie mit der nichteuklidischen Raumanschauung zusammenhängt, zeigt schon der Umstand, dass

die Riemannschen Erörterungen, ebenso wie die der zweiten Beltramischen Abhandlung von vornherein sich mit der Betrachtung von n fach ausgedehnten Räumen beschäftigen.

Seit dieser Zeit nimmt die Untersuchung der in solchen beliebig ausgedehnten Räumen von beliebigem Krümmungsmaass angeblich herrschenden Verhältnisse einen breiten Platz in der mathematischen Forschung und der Fachliteratur ein.

Es sollen nun zunächst die wichtigsten Lehren der nichteuklidischen Geometrie, vorläufig unter Beschränkung auf den dreifach ausgedehnten Raum in dem für das Verständnis der weiteren Erörterungen erforderlichen Umfange kurz zusammengestellt werden.

Der Satz, dass im ebenen Dreieck die Winkelsumme auch einen kleineren Wert als zwei Rechte haben könne, ist gleichbedeutend mit dem anderen, dass eine Gerade, die mit einer zweiten einen spitzen Winkel bildet, eine dritte mit beiden in derselben Ebene liegende und auf der zweiten senkrecht stehende Gerade nicht notwendig zu schneiden braucht. Vielmehr hat man bei der gedachten Annahme alle durch einen Punkt A ausserhalb einer Geraden UV in der Ebene AUV gezogenen Geraden in zwei Klassen zu teilen, die der die Gerade UV schneidenden und die der sie nicht schneidenden Linien. Die Grenze dieser beiden Linienklassen bildet eine Gerade, die gegen das von A auf UV gefällte Lot unter einem spitzen Winkel geneigt ist, sie ist es, die in der nichteuklidischen Geometrie den Namen einer *Parallele* zu UV führt. Daraus folgt, dass sich durch jeden Punkt ausserhalb einer Geraden zu dieser stets zwei Parallelen ziehen lassen, die sich den beiden durch die Projection jenes Punktes auf die Gerade gebildeten Hälften derselben fortwährend nähern, um „im Unendlichen“ mit ihnen zusammenzutreffen. Diese *asymptotische* Näherung bringt es zugleich mit sich, dass der Winkel, unter dem die Parallele zu einer Geraden sich gegen das von einem ihrer Punkte auf die Gerade gefällte Lot neigt, der sogenannte *Parallelwinkel*, sich immer mehr dem Werte eines Rechten nähert, je geringer beim Fortgehen nach dem „Unendlichen“ der Abstand beider Geraden wird. Zugleich ergibt sich dabei, dass der geometrische Ort für die Punkte gleichen Abstandes von einer Geraden eine krumme Linie sein muss, während für zwei einander nicht schneidende Gerade derselben Ebene nur eine einzige auf beiden senk-

recht stehende dritte existirt, auf der der Minimalabstand dieser beiden sich von dort beiderseits in's Unbegrenzte von einander entfernenden Geraden gemessen wird.

Es wird darauf auseinandergesetzt, dass die Beziehung des Parallelismus reciproker Art sein müsse, und als weitere Consequenz dieses Sachverhalts ergibt sich, dass alle unter sich parallelen Geraden im Raume ein Bündel von Linien bilden, die nach demselben unendlich fernen Punkte zustrebend sich untereinander asymptotisch nähern und dabei als Normalen einer Schaar untereinander congruenter, in allen ihren Punkten gleichmässig gestalteter Flächen auftreten. Diesen Flächen, die demgemäss als Kugelflächen von unendlich grossem Radius und mit unendlich entferntem Centrum aufzufassen sind, ist von Lobatschewsky der Name *Grenzflächen* beigelegt worden, während jede der zu solcher Fläche senkrechten Geraden als Axe oder Radius derselben, der Schnitt mit einer durch zwei Axen bestimmten Ebene als *Grenzlinie* bezeichnet worden ist. Die eben erwähnten Gebilde spielen in der nichteuklidischen Geometrie insofern eine ganz besondere Rolle, als durch sie die Einführung metrischer Beziehungen in das System dieser Geometrie ermöglicht wird.

Von der auf einer Grenzfläche durch drei Grenzlinien gebildeten Figur wird nämlich gelehrt, dass ihre Winkelsumme gerade zwei Rechte beträgt, woraus die Anwendbarkeit der euklidischen Geometrie auf die Grenzfläche sich herleitet. Zugleich aber ergibt sich, dass, wenn man zu zwei Parallelen in regelmässig sich folgenden gleichen Abständen die zu beiden Geraden normalen Grenzlinien construirt, die Längen der zwischen jene beiden Parallelen fallenden Grenzbogen eine geometrische Reihe bilden. Der Quotient dieser Reihe ist eine nur in der euklidischen Geometrie — wo die Grenzlinien gerade sind — festbestimmte, dort der Einheit gleiche Grösse. Für die nichteuklidische Geometrie repräsentirt dieser Fall aber nur eine unter unzähligen Möglichkeiten, zwischen denen ohne Hinzunahme der Erfahrung eine Entscheidung angeblich nicht getroffen werden kann. Demgemäss wird die Gestaltung des Raumes von dem Werte einer gewissen Constante abhängig gemacht, nämlich der Entfernung, die zwei Grenzlinien haben müssten, damit der Quotient der eben gedachten Reihe der Basis der natürlichen Logarithmen gleich wird. Diese Constante, die in der euklidischen Geometrie den Wert ∞ haben würde,

soll im Nachfolgenden mit dem vielfach bereits dafür verwendeten Buchstaben k bezeichnet werden.

Der Übergang von der Grenzfläche auf die Ebene erfolgt nun unter Verwendung des Umstandes, dass der Schnitt der Grenzfläche mit jeder nicht durch eine Axe derselben gelegten Ebene ein Kreis ist. Unter Ausnutzung der Existenz, die diesem Kreis in der Ebene wie in der Grenzfläche gleichzeitig zukommt, gelangt so die nichteuklidische Geometrie für die verschiedenen in ihrem System auftretenden Beziehungen zu ganz bestimmten, natürlich überall die Constante k enthaltenden Formeln, in denen die sogenannten hyperbolischen Funktionen eine hervortretende Rolle spielen.

Einem Raume von der eben dargelegten Beschaffenheit schreibt man ein *negatives Krümmungsmaass* zu. Die Betrachtung solcher Raumform, mit der die vorliegende Schrift sich vorzugsweise, in ihren ersten beiden Abschnitten ausschliesslich, beschäftigen wird, bildet den Gegenstand der *nichteuklidischen Geometrie im engeren Sinne*, die auch die Namen der *pseudosphärischen* oder *hyperbolischen Geometrie* führt, im Gegensatz zu der als *sphärische*, beziehungsweise *elliptische Geometrie* bezeichneten Theorie der *positiv gekrümmten Räume*. Letztere Theorie will, weil die Gerade als Kreis, die Ebene als Kugelfläche von unendlich grossem Radius, das ebene Dreieck als Spezialfall des sphärischen Dreiecks aufgefasst werden kann, überhaupt die Möglichkeit zugelassen wissen, dass das, was uns als eben oder gerade erscheint, nur Stücke von schwach gekrümmten, *in sich zurückkehrenden*, Raumgebilden seien, ohne dass wir vermöge der Beschränktheit unseres Erfahrungsgebietes uns dieses Sachverhalts bewusst würden. Es ist klar, dass diese — *den Begriff der geraden Linie preisgebende* — Theorie noch weit problematischer ist, als das System der pseudosphärischen Geometrie, die völlige Verfehltheit ihrer Begründung (mittels des Krümmungsmaasses) wird im dritten, ihre direkte Unmöglichkeit im letzten Abschnitt der vorliegenden Schrift offenbar werden.

I.

Bedenkliche Folgen der nichteuklidischen Geometrie.

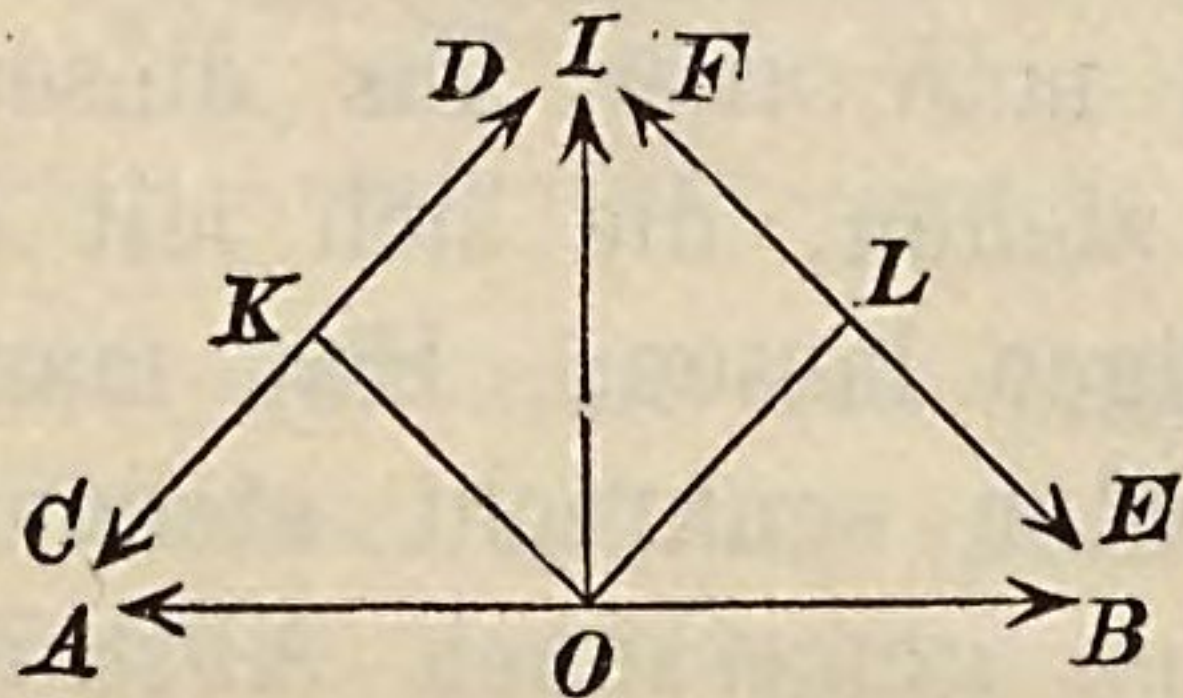
Für die nun vorzunehmende Prüfung der nichteuklidischen Theorie ist es wesentlich, zu konstatieren, dass die Geradlinigkeit der in ihr auftretenden „Geraden“ nirgends bewiesen wird. Es wäre dies allerdings ja auch gar nicht möglich, weil bei der Bestimmung dieser Linien die oben erwähnte Constante mitspricht, über deren Grösse die Theorie keinen Aufschluss gibt. Liesse sich für die Geradlinigkeit der als „gerade“ bezeichneten Linien von vornherein ein Beweis führen, so müsste solcher Beweis ohne Rücksicht auf den Wert von k Gültigkeit besitzen. Da man nun durch 2 Punkte unzählige Linien legen kann, die den sonst in der nichteuklidischen Geometrie für die Gerade gegebenen Bestimmungen entsprechen und sich nur eben durch den verschiedenen Wert von k unterscheiden, so käme man bei dem Vorhandensein eines solchen Beweises zu einem offenbaren Widerspruch mit der auch von der nichteuklidischen Geometrie anerkannten Grundeigenschaft der Geraden, durch zwei Punkte völlig bestimmt zu sein. Hieraus folgt denn auch die vollkommen hypothetische Natur derjenigen Linien- und Flächengebilde, welche ausserhalb der nichteuklidischen Geometrie überhaupt keine Existenz haben. Wenn den sich asymptotisch nähernden Linien, die die nichteuklidische Theorie als Gerade annimmt, die Geradheit abgesprochen wird, kann bei den Flächen, deren Normalen sie sind, d. i. den Grenzflächen (nebst den auf diesen verlaufenden Grenzlinien) von einer überall gleichmässigen Constitution natürlich nicht die Rede sein. Ebenso hypothetisch ist ferner ganz offenbar die krumme Beschaffenheit der Linien und Flächen, welche die geometrischen Örter für die Punkte gleichen Abstandes von gegebenen Geraden oder gegebenen Ebenen sind, sie hört in dem Augenblick auf, wo die asymptotische Näherung von Geraden sich als unmöglich herausstellt.

Wie die nichteuklidische Geometrie die Entscheidung unter den verschiedenen von ihr als möglich erachteten Raumformen der Erfahrung überlassen will, so setzt sie jeder Bezweiflung ihres Rechtes zu solchem Verfahren die Erklärung entgegen, dass in dem System der von ihr aufgestellten Sätze alles harmonire, wenn ihre Voraussetzungen unzulässig seien, so müsste sie doch bei ihrem auf diese Voraussetzungen gestützten Vorgehen einmal zu einem inneren Widerspruch kommen, die thatsächliche Widerspruchsfreiheit ihrer Theorie sei eine Rechtfertigung des von ihr eingenommenen Standpunktes.

Die prinzipielle Frage, ob und inwieweit die Widerspruchsfreiheit, falls sie wirklich vorhanden ist, die ihr von der nichteuklidischen Geometrie zugeschriebene Beweiskraft verdient, soll hier vorläufig unerörtert bleiben. Vielmehr soll zunächst die thatsächliche Frage einer Prüfung unterzogen werden, ob die angebliche Widerspruchsfreiheit die behauptete Evidenz besitzt, es ergeben sich da alsbald eine Reihe gewichtiger Bedenken, die in der Annahme von asymptotisch sich schneidenden Geraden ihre Wurzel haben.

Nach der ausdrücklichen Lehre des nichteuklidischen Systems haben zwei „parallele“ Gerade „im Unendlichen“ die Entfernung *Null*, während zugleich der Parallelwinkel *ein Rechter* ist, d. h. sie stehen in demselben Punkte auf derselben Geraden senkrecht, fallen also auf einem Teile ihrer Länge zusammen, woraus sich vermöge der Definition der Geraden ergibt, dass sie überhaupt zusammenfallen und demgemäss auch im Endlichen nicht um eine immer wachsende Strecke von einander abstehen können. Die von der nichteuklidischen Geometrie geforderte Möglichkeit asymptotischer Näherung zwischen zwei Geraden ist eben mit dem Begriffe solcher Linien von vornherein unvereinbar. Um aber die Unzuträglichkeiten, zu denen die Annahme solcher Möglichkeit führt, an einem weiteren Beispiele zu illustriren, betrachte man die nachstehend beschriebene Situation:

Fig. 1.



In der vorstehenden Figur soll die Linie OK , welche auf CD , ebenso wie die Linie OC , welche auf EF senkrecht steht, die Länge besitzen, zu welcher als Parallelwinkel ein halber Rechter gehört.

Ferner sei $\sphericalangle AOK = KOJ = JOL = LOB = \frac{R}{2}$.

Dann würde $OA \parallel KC$, $KD \parallel OJ \parallel LF$, $OB \parallel LE$ sein.

Da demgemäss die beiden Strahlen KD und LF im Unendlichen zusammentreffen, so hätte man die Möglichkeit, durch eine Drehung von der Grösse *Null* um den unendlich entfernten Punkt der beiden genannten Strahlen, der zugleich der unendlich entfernte Punkt des Strahles OJ ist, die ganze Linie DC mit der Linie FE zur Deckung zu bringen. Hierbei würde jeder Punkt der sich drehenden Linie CD einen Grenzbogen von merklicher Länge, aber vom Centriwinkel *Null* beschreiben, der unendlich ferne Punkt des Strahles KC , müsste, um mit dem unendlich fernen Punkte von LE zusammenzufallen, einen Bogen beschreiben, der auf den beiden eben genannten Strahlen, im Unendlichen senkrecht stehen würde. Da aber diese Strahlen dort mit den Strahlen OA und OB , den beiden Hälften der unendlichen Geraden AB zusammenfallen, müsste dieser Bogen auf AB in den beiden unendlich fernen Punkten dieser Geraden senkrecht stehen, d. h. er müsste ein Halbkreis mit dem beiderseits in's Unendliche reichenden Durchmesser AB , jedenfalls aber mit dem Centrum O sein, während dieses Centrum ja angenommenermaassen mit dem „unendlich fernen“ Punkte des Strahles OJ zusammenfallen sollte.

Alle diese Widersprüche werden auch durch die Gleichungen, welche die nichteuclidische Geometrie für ihre „Geraden“ aufstellt, nicht beseitigt, denn — wie bereits bemerkt — aus den Formeln kann die Geradheit der durch dieselben dargestellten Linien überhaupt nicht bewiesen werden. Nimmt man aber an, dass die hier in Rede stehenden Linien die ihnen von der neueren Theorie hypothetischer Weise beigelegte Geradheit nicht besitzen, so werden alle die eben dargelegten Bedenken von selbst gegenstandslos.

Umgekehrt kann man aber aus diesen Gleichungen selber gewisse Folgerungen ziehen, die sich mit dem Grundbegriff der Geraden nicht vereinigen lassen. Hat man z. B. zwei Gerade, die auf derselben dritten senkrecht stehen, bezeichnet den auf dieser dritten Geraden gemessenen Abstand der beiden ersten

mit p , versteht ferner unter y die Länge des von irgend einem Punkte der zweiten Geraden auf die erste gefällten Lotes und unter x das zwischen diesem Lot und der dritten Geraden liegende Stück der ersten, so hat man bekanntlich die Gleichung

$$\operatorname{tg} \frac{y}{k} = \operatorname{tg} \frac{p}{k} \cos \frac{x}{k}$$

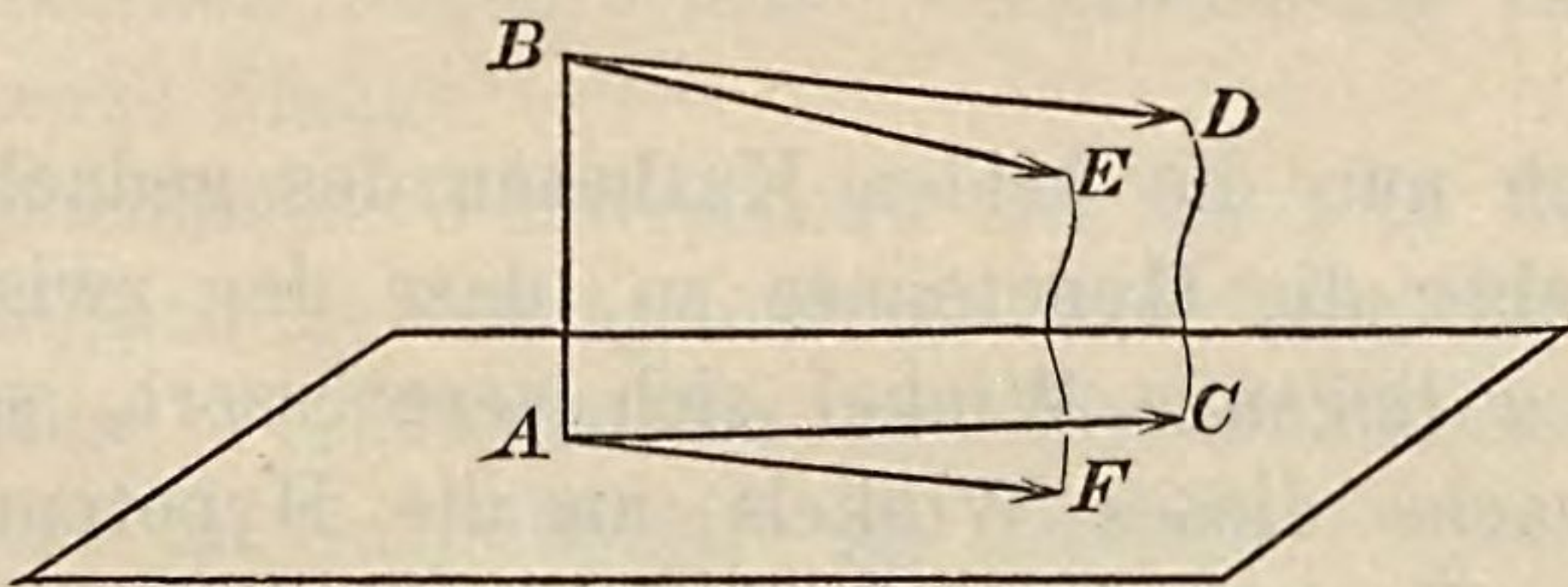
Die Anwendung dieser Gleichung auf den Fall, in dem $y = \infty$, also $\operatorname{tg} \frac{y}{k} = 1$ ist, ergibt

$$\operatorname{tg} \frac{p}{k} = \frac{1}{\cos \frac{x}{k}}$$

und damit die Folgerung: Wenn man von einem Punkte einer Geraden auf dieser beiderseits gleiche Stücke von der Länge x abschneidet und in den Endpunkten dieser Strecken auf jener Geraden Lote errichtet, so hat die die erste Gerade nicht schneidende Gerade, welche diese Lote asymptotisch berührt, von jener einen Abstand, der um so kleiner ausfällt, je grösser die Strecken x gewählt werden. Für $x = \infty$ erhält man direct $p = 0$, d. h.: es lässt sich durch jeden Punkt einer Geraden eine zweite Gerade ziehen, die mit ihr im Endlichen zusammenfällt, im Unendlichen aber unendlich weit von ihr absteht.

Um ferner die Consequenzen zu erläutern, welche die hier betrachteten Verhältnisse auf stereometrischem Gebiete nach sich ziehen, errichte man auf einer Ebene irgend ein Lot AB , ziehe von dessen Fusspunkt A in der Ebene den Strahl AC und durch B zu AC die Parallele BD .

Fig. 2.



Legt man nun durch BD eine zur Ebene beider Parallelen senkrechte Ebene, so hat diese mit der gegebenen Ebene offenbar den „unendlich fernen Punkt“ jener beiden Parallelen gemeinsam.

Zieht man ferner in dieser neuen Ebene irgend eine Gerade BE , so lässt sich zeigen, dass diese Gerade die ursprüngliche Ebene nicht mehr treffen kann, wie klein auch der Winkel EBD sei. Denn es ist ohne Schwierigkeit einzusehen, dass der Winkel EBA immer grösser sein muss, als der zu der Strecke AB gehörende Parallelwinkel DBA , dass also die Linie BE ihre Projection auf die gegebene Ebene — BF — niemals schneiden kann. Auf dieser Linie BF könnte ja aber allein der Punkt liegen, den BE mit der gegebenen Ebene eventuell gemeinsam hat. Demnach ergibt sich hier der Zustand, dass zwei Ebenen nur einen einzigen Punkt gemeinsam haben, d. h. ein Widerspruch gegen die Grundeigenschaften der Ebene.

Ein noch weit schärferer Einwand aber knüpft sich an den Satz der nichteuklidischen Geometrie, nach welchem die Fläche eines Dreiecks dem Überschuss von zwei Rechten über die Winkelsumme proportional sein soll. Nach diesem Satze hat beispielsweise die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen einer Eckpunkt im Unendlichen liegt, während die ihm gegenüberliegende Kathete die Länge a besitzt, die Grösse

$$k^2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin \frac{a}{k}} \right) \right)$$

Denn von den beiden an diese Kathete anstossenden Winkeln ist der eine ein Rechter, während der andere der zur Länge a gehörende Parallelwinkel sein muss, die trigonometrische Tangente dieses Winkels hat ja nach der nichteuklidischen Lehre den

Wert $\frac{1}{\sin \frac{a}{k}}$

Halte ich nun die beiden Katheten des gedachten Dreiecks fest, drehe aber die Hypotenuse so, dass der zwischen ihr und der Kathete a liegende Winkel sich vergrössert, so genügt der kleinste Zuwachs dieses Winkels, um die Hypotenuse aus einer zu der zweiten Kathete jenes Dreiecks „parallelen“ Linie zu einer dieselbe „nicht schneidenden“ zu machen, d. h. den Flächeninhalt des in Rede stehenden Dreiecks von dem oben angegebenen endlichen Betrage ohne jeden stetigen Übergang zu einer unend-

lichen Grösse werden zu lassen. Dass dies logisch ganz unannehmbar ist, bedarf keiner Erörterung.

Allen Widersprüchen von der eben dargelegten Art glaubt nun die nichteuklidische Geometrie darum weiter keinen Wert beilegen zu sollen, weil sie bei den „unendlich fernen“ Elementen der betrachteten Gebilde zu Tage treten. Für solche Gebilde beansprucht sie nämlich das Recht, die von ihr sonst vorausgesetzten oder abgeleiteten Sätze beliebig ausser Kraft zu setzen. Wenn aber eine Definition oder eine wesentliche Eigenschaft für irgend einen Begriff in voller Allgemeinheit aufgestellt oder behauptet worden ist, so ist es unzulässig, diese Allgemeinheit an irgend welcher Stelle einzuschränken, und diese erste Forderung alles logischen Denkens sollte insbesondere eine Theorie nicht ausser Acht lassen, deren ganze Basis die Behauptung von der Unzulänglichkeit der bisher für die Grundlagen der Geometrie gegebenen Beweise bildet. Im Einzelnen aber ist noch zu bemerken, dass der zuletzt geltend gemachte Einwand gegen die angebliche Unanfechtbarkeit der nichteuklidischen Geometrie sich zwar auf ein unendlich ausgedehntes Gebilde, aber auf einen endlichen Wert bezieht.

Von Rechts wegen sollte die Aufdeckung solcher Widersprüche genügen, um in der Frage nach der sicheren Begründung der überlieferten euklidischen Geometrie zu einer bejahenden Entscheidung zu kommen. Denn in dieser fallen alle die erwähnten, aus der Annahme asymptotisch sich nähernder Graden hervorgehenden Unbegreiflichkeiten einfach fort, insbesondere erlangt auch die Dreiecksfläche den unendlich grossen Wert, welcher ihr bei Annahme zweier sich nicht schneidender (d. i. in euklidischem Sinne paralleler) Schenkel zukommt, nur durch eine stetige, nirgends willkürlich abgebrochene Vergrösserung ihres Betrages über jede Grenze hinaus.

Einen Schein des Widerspruchs hat auch in die euklidische Geometrie lediglich die beklagenswerte Gewohnheit hinein gebracht, das gegenseitige Verhältnis der euklidischen Parallelen als das des „Schneidens im Unendlichen“ zu bezeichnen, eine Gewohnheit, die die schiefe zur nichteuklidischen Geometrie führende Auffassung der Dinge schon im Kern enthält.

Es zeigt sich hier ein Ausfluss des Verfahrens, welches vielfach überhaupt die mathematische Forschung zum Schaden ihres

Gehaltes und auch ihres Credites beherrscht, statt der Sache die Formel, statt der dem Dinge an sich gerecht werdenden Anschauung die aus einem vorgefassten Prinzip abgeleitete Theorie zu setzen, die denn auch kein Bedenken trägt, den Sachverhalt durch allerhand uneigentliche Auffassungen so lange teils zu pressen, teils zu dehnen, bis er in das theoretische System hineingezwängt werden kann. Nirgends treibt dieses dem eigentlichen Geiste der Mathematik schnurstracks zuwiderlaufende Verfahren stärkere Blüten als in den die Gültigkeit der altüberlieferten Geometrie anzweifelnden neueren Raumtheorien.

In der That bildet in den zahlreichen Abhandlungen, die den speziellen Ausbau der neueren Lehre zum Zweck haben, den eigentlichen Kern die *algebraische Transformation*, deren Geltungsbereich und Deutungsfähigkeit ohne weitere Prüfung als grenzenlos angesehen wird. Dabei laufen denn auch eine Reihe von Wunderlichkeiten und Inconsequenzen unter, an denen Niemand Anstoss zu nehmen scheint. So wird die Fläche gleichen Abstandes von einer festen Ebene ganz harmlos als eine „Kugel von complexem Radius“ erklärt, da doch diese Auffassung — ich scheue mich nicht es auszusprechen — einfach alles und jedes Sinnes ermangelt, während andererseits dieselbe Theorie, die die Grundeigenschaften ihrer Gebilde „im Unendlichen“ lieber suspendirt, als dass sie auf ihre künstlichen Vorstellungen verzichtete, bei anderen, besser in das System passenden Anlässen ohne irgend welche Skrupel einzelnen in ihren Formeln vorkommenden Grössen den Wert ∞ erteilt, um aus solcher Annahme dann rückhaltlos die weitgehendsten Schlüsse zu ziehen.

Die äusserliche und formelle Art, in welcher auf die räumlichen Verhältnisse die feststehenden Formen gewisser aus ganz anderen Gebieten herübergenommener Betrachtungen angewendet werden, findet einen recht bezeichnenden Ausdruck auch in der Nomenclatur. In der Benennung der drei angeblich möglichen Formen der Raumgestaltung als der *elliptischen*, der *parabolischen* und der *hyperbolischen* finde ich nur eine Verdunkelung des eigentlichen Thatbestandes durch Anlehnung an ein anderweit bereits bestehendes, den aufgestellten Theorien einen Schein des Rückhalts gebendes System, mit dem sie in Wahrheit fast nichts zu thun haben. Das System der nichteuclidischen Geometrie hat auch einen ganz unberechtigten Vorteil aus der Analogie seiner Formeln

mit denen der sphärischen Trigonometrie gezogen. In Wahrheit sollte man auf Grund dieser Analogie eher zu der Vermutung kommen, dass die Gebilde, innerhalb deren die Formeln der nicht-euklidischen Theorie Geltung haben, ebensowenig eben sein können, wie die Kugelfläche. Und die Beltramische Versinnlichung der im zweidimensionalen Gebiete geltenden nichteuklidischen Formeln durch die Verhältnisse, welche auf den Flächen von constanter negativer Krümmung herrschen, stellt sich für den unbefangenen urteilenden Verstand eher als eine Widerlegung, denn als eine Bestätigung der nichteuklidischen Theorie dar, mindestens — wie weiterhin noch ausgeführt werden wird — beweist sie gar nichts für den eigentlichen Kernpunkt des Streites um die Grundlagen der Geometrie. Nichtsdestoweniger gilt die Beltramische Interpretation erstaunlicher Weise für eine Hauptstütze der nichteuklidischen Raumanschauung.

II.

Unvereinbarkeit der nichteuklidischen Geometrie mit dem Prinzip der überall gleichmässigen Gestaltung des Raumes.

Alle Bedenken, die in dem vorhergehenden Abschnitt gegen die nichteuklidische Geometrie geltend gemacht, alle Inconsequenzen und Widersprüche, die ihren Vertretern nachgewiesen sind, ändern indessen an der Thatsache nichts, dass diese Geometrie innerhalb der maassgebendsten Fachkreise eine ausgesprochene Herrschaft behauptet. Daraus erwächst für den, der diese Herrschaft für unberechtigt, die Basis der modernen Theorien für irrtümlich hält, die Notwendigkeit, den Schlussfolgerungen des nicht euklidischen Systems mit noch schärferen Beweisgründen zu Leibe zu gehen. Selbstverständlich können diese Beweisgründe nur aus einer philosophischen Erörterung der Grundbegriffe, gewonnen werden, um die überhaupt es sich handelt. Diese Erörterung kann indessen noch in sehr verschiedener Weise vorgenommen werden, sie kann sich auf das Untersuchungsgebiet im Ganzen beziehen, sie kann auch auf eine besonders charakteristische Einzelheit der streitigen Frage gerichtet sein.

Indem die Verfolgung des erst angedeuteten Weges, d. i. die Analyse des Raumbegriffes selber einem weiterhin folgenden Abschnitt dieser Schrift vorbehalten bleibt, soll zunächst der zweite Weg eingeschlagen werden. Naturgemäss kann die demgemäss

anzustellende Untersuchung sich nur um den Punkt drehen, dessen fortwährende Umgehung von Seiten der nichteuklidischen Geometrie die Quelle aller ihr zur Last fallenden bedenklichen Folgerungen bildet, nämlich um den *Begriff der geraden Linie*.

Allen Linien, die als *möglicherweise gerade* in der nichteuklidischen Geometrie auftreten, ist als wesentliche Eigenschaft nur die gemein, dass sie bei stetigem Verlaufe bis in's Unendliche durch zwei Punkte in ihrer Lage gegen *eine* zweite Linie völlig bestimmt sind. In dieser Eigenschaft wurzelt eben die Möglichkeit der Versinnlichung, die die Formeln der nichteuklidischen Geometrie durch Beltrami gefunden haben; er selbst erklärt auch noch ausdrücklich, dass bei der planimetrischen Auffassung, auf der seine Betrachtungen fussen, das Wesen der Geraden nicht in vollem Umfange zur Geltung gebracht werde.⁵⁾

Als charakteristische Eigenschaft der Geraden gilt auch der nichteuklidischen Geometrie die absolute Umkehrbarkeit, auf die sie soviel Wert legt, dass sie für die Existenz solch umkehrbarer Linien einen umständlichen und künstlichen Beweis führt. Wie verfehlt es ist, diese Eigenschaft der Geraden in so spezieller Weise nachweisen zu wollen, wird aus den Ausführungen des letzten Abschnittes deutlich erhellen, hier soll nur constatirt werden, dass die nichteuklidische Geometrie von der in so förmlicher Weise bewiesenen Umkehrbarkeit der Geraden im Weiteren gar keinen Gebrauch macht. Es ist dies eine Folge der ganzen von ihr beobachteten Untersuchungsmethode, die sich mit der Art, wie die Geradheit einer Linie eventuell zu prüfen sein würde, von vornherein nicht verträgt.

Solche Prüfung würde nur in der Weise möglich sein, dass man die zu prüfende Linie in ihrem Verhältnis zu mehreren (zwei, beziehungsweise drei) festen Linien betrachtet. Von der Basirung ihrer ganzen Beweisführung auf solche Betrachtung ist aber die nichteuklidische Geometrie soweit entfernt, dass sie in ihren grundlegenden Argumentationen nicht einmal eine derartige Linie benutzt. Alle ihre Schlussfolgerungen kommen überhaupt nur dadurch zu Stande, dass sie ihre Basis fortwährend wechselt. Ihr Verfahren ist immer von der gleichen Art: eine Linie, deren Geradheit noch keineswegs feststeht, vielmehr eben noch zu erweisen sein würde, wird sofort zur geradlinigen Basis eines neuen Liniensystems genommen, dessen Geradheit von der hypothetischen

Geradheit jener ersten Linie in ganz derselben hypothetischen Weise abhängt und darum den doppelten Grad von Unsicherheit besitzt. Zu welchen Folgerungen solches Verfahren führt, ersieht man, sobald man beispielsweise den nachstehenden Gedankengang festhält.

„Ob die durch die nichteuklidischen Formeln für die Gerade dargestellten Linien wirklich gerade sind oder nicht, kann von vornherein nicht festgestellt werden, das hängt ja von der Constanten k ab, über die allein die Erfahrung entscheidet. Wie aber auch diese Entscheidung durch die Erfahrung ausfallen möge, an den *inneren* Verhältnissen des in Gemässheit irgend eines Wertes von k gestalteten Raumes kann dadurch natürlich *nichts* geändert werden, dieser Raum könnte ganz wohl auch so beschaffen sein, dass die gedachten Linien gerade sind, und wenn dies nicht der Fall ist, so liegt dies daran, dass er im Ganzen eine seine inneren Verhältnisse nicht ändernde Verbiegung erlitten hat. Demnach bleibt dieselbe Gleichung, die in der nichteuklidischen Geometrie eine Gerade darstellt, auch in der euklidischen Geometrie in Kraft, wo die durch sie repräsentirte Linie von dem nichteuklidischen Fall ganz allein dadurch abweicht, dass sie krumm ist.“

Wendet man dies beispielsweise auf die Bolyaischen Parallelen an, indem man eine derselben zur Abscissenaxe eines ebenen Coordinatensystems in der Weise macht, dass die Ordinate im Endpunkte der jedesmaligen Abscisse senkrecht zu dieser construirt wird, so gilt für die andere Parallele bekanntlich die Gleichung,

$$(1) \dots \dots \dots \operatorname{tg} \frac{y}{k} = \operatorname{tg} \frac{y_0}{k} e^{-\frac{x}{k}}$$

wenn man die Abscisse mit x , die Ordinate mit y , die zur Abscisse *Null* gehörende Ordinate mit y_0 bezeichnet.

Diese Gleichung existirt ja allerdings auch in der euklidischen Geometrie, aber die durch sie dargestellte Curve weicht von der Bolyaischen Parallele nicht nur durch den Mangel der Geradheit, sondern auch durch die Grösse des Winkels ab, den jede der beiden Linien mit der jedesmaligen Ordinate bildet. Die trigonometrische Tangente dieses Winkels hat in der nichteuklidischen Geometrie, wo dieser Winkel als der sogenannte Parallelwinkel auftritt, den Wert $\frac{1}{\sin \frac{y}{k}}$, während sie für denselben Winkel bei der durch

jene Gleichung in der euklidischen Ebene dargestellten Curve vielmehr den Wert $\frac{2}{\sin \frac{2y}{k}}$ besitzt. Dieser Unterschied, der nur für

den Wert $k=\infty$ verschwindet, um dann in beiden Fällen einen rechten Winkel übrig zu lassen, kommt ganz allein dadurch zu Stande, dass die nichteuklidische Geometrie der in Rede stehenden Linie die Geradheit als möglich zuspricht, dann aber diese Möglichkeit sofort als Thatsache verwendet. Überall zeigt sich eine Verflechtung des zu Beweisenden in den Beweis, ein fortwährender Wechsel des Standpunktes, der die Widerlegung aus dem System heraus allerdings einfach unmöglich macht; keine philosophische Doctrin der Welt kann sich mit der Bolyaischen Geometrie hinsichtlich der Aalglätte vergleichen, die jedem festen Angriff sich zu entwinden weiss.

In der That sind ja auch die Widersprüche, die im ersten Abschnitt dieser Schrift aufgedeckt worden sind, keine Widersprüche innerhalb des Formelsystems, das in sich vollständig geschlossen ist, sie kommen sämtlich durch ausserhalb des Formelsystems stehende Betrachtungen zu Stande. Darum aber gerade zeigen sie, dass diese Immunität des Formelsystems für die Entscheidung der Frage, deren wahrer Charakter durch die Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Theorie bewiesen werden soll, ganz belanglos ist. Denn die eben aufgedeckten Widersprüche gehen zwar nicht das Formelsystem, wohl aber die Voraussetzungen an, auf die sich dieses Formelsystem gründet. Nimmt man nun hinzu, dass, wie bereits bemerkt, die Ausnutzung der Voraussetzungen eine so unvollständige, an einem so wesentlichen Punkt, wie dem der Umkehrbarkeit der geraden Linie, einfach vorbeigehende ist, so darf man allerdings hoffen, durch kräftige Betonung eben dieses von der nichteuklidischen Geometrie nicht berücksichtigten Punktes diese Geometrie in augenfälliger Weise *ad absurdum* zu führen.

Im Übrigen hängt die Behandlung der Geraden an sich, wie sich auch in den späteren Abschnitten dieser Schrift noch deutlicher zeigen wird, auf das Engste mit der schon gekennzeichneten schiefen Betrachtung vom Wesen des Parallelismus zusammen. In beiden Fällen operirt die nichteuklidische Geometrie mit wesentlich negativen Momenten, sei es, dass sie sich mit der for-

mellen Widerspruchsfreiheit begnügt, sei es, dass sie als Kennzeichen des Parallelismus den Fortfall des Schnittpunktes bei den Geraden ansieht. Ohne Zweifel kann man sagen, dass solche an dem eigentlichen Inhalt des behandelten Stoffes vorbeigehende Methode von vornherein zur Unfruchtbarkeit verurteilt ist.

Wenn man die natürliche Auffassung, die der gesunde Verstand vom Wesen des Parallelismus besitzt, ohne theoretische Voreingenommenheit prüft, so kann kein Zweifel sein, dass nicht der Mangel des Schnittpunktes, sondern der immer gleiche Abstand den eigentlichen Inhalt der mit jenem Begriff verbundenen Vorstellung bildet. Daraus folgt natürlich, dass solche Linien sich nicht schneiden können, aber dieses Nichtschneiden ist nicht das ursprüngliche, sondern ein abgeleitetes Moment, durch dessen Voranstellung die ganze Untersuchung eine falsche und verhängnisvolle Richtung erhalten hat.

Allerdings kann ja eine wissenschaftliche Behandlung der Raumlehre sich mit der Constatirung dessen, was die naïve Auffassung unter Parallelismus versteht, nicht begnügen, es bedarf einer Untersuchung, inwieweit diese Auffassung zulässig und berechtigt ist. Aber diese Untersuchung musste, um zum Ziele zu gelangen, von einer ganz anderen Fragestellung ausgehen. Es handelte sich nicht sowohl darum, die Grenze zwischen den eine Gerade schneidenden und den sie nicht schneidenden Geraden aufzusuchen, als vielmehr die Frage zu beantworten, ob die Linie gleichen Abstandes von einer gegebenen Geraden selbst eine Gerade sei. Das aber setzt natürlich die Möglichkeit voraus, eine Linie auf ihre Geradheit zu prüfen.

So sehr sich nun die nichteuclidische Geometrie durch die hypothetische Methode, deren sie sich fortwährend befleissigt, selbst um die Möglichkeit solcher Prüfung gebracht hat, so kann man doch keineswegs sagen, dass ihr dazu die Mittel an sich gefehlt hätten.

Wie schon bemerkt, kann die Umkehrbarkeit einer Linie nur durch eine Betrachtung ihres Verhältnisses zu gewissen festen Grundlinien erkannt werden und in der That liegt in diesem Sachverhalt auch der Schlüssel zu dem ganzen geometrischen System. Das Wesen des Raumes erschöpft sich, wie im letzten Abschnitt noch eingehender ausgeführt werden wird, in der Möglichkeit, alle Lagenbeziehungen auf eine beschränkte Anzahl von gegenseitig unabhängigen, an

allen Punkten des Raumes ganz gleichmässig anzubringenden Fundamentalbestimmungen zurückzuführen.

Dass diese Möglichkeit jedenfalls von einschneidender Bedeutung für die ganze Raumauffassung ist, geht schon aus der Rolle hervor, die dabei die Dimensionszahl des Raumes spielt, denn diese fällt ja vollkommen mit der eben gedachten Zahl von überhaupt möglichen unabhängigen Grundbestimmungen zusammen. In der That kann denn auch kein geometrisches System ohne fortwährende Verwendung des so eben aufgestellten Prinzips auskommen, auch die nichteuklidische Geometrie kann nur durch Benutzung desselben zu allen ihren Formeln gelangen. Aber sie begeht dabei den Fehler, dass sie, statt ihre ganze Beweisführung auf dieses Prinzip zu basiren, demselben nur die nachträgliche Formulirung der durch das oben gebildete hypothetische Verfahren bereits zu Stande gebrachten Resultate entlehnt.

Im Nachstehenden soll nun dieses Prinzip in folgerichtiger Weise verwendet werden, indem dabei naturgemäss ein jeder Punkt durch seine Coordinaten bestimmt wird.

Bleibt man zunächst in der Ebene und definirt einen Punkt derselben durch Ordinate und Abscisse in der schon oben, bei Aufstellung der Gleichung (1), (S. 15) beobachteten Art, so ergibt sich sofort, dass eine eindeutige Punktbestimmung nicht zu erlangen ist. Denn hat man zwei zu einander senkrechte Axen und misst auf der einen die Abscisse x ab, um dann im Endpunkt der erhaltenen Strecke auf ihr ein Lot von der Länge y zu errichten, so gelangt man in der nichteuklidischen Geometrie zu einem anderen Punkte, als wenn man auf der anderen Axe zunächst die Strecke y abmisst, um dann auf ihr im Endpunkte ein Lot von der Länge x zu errichten.

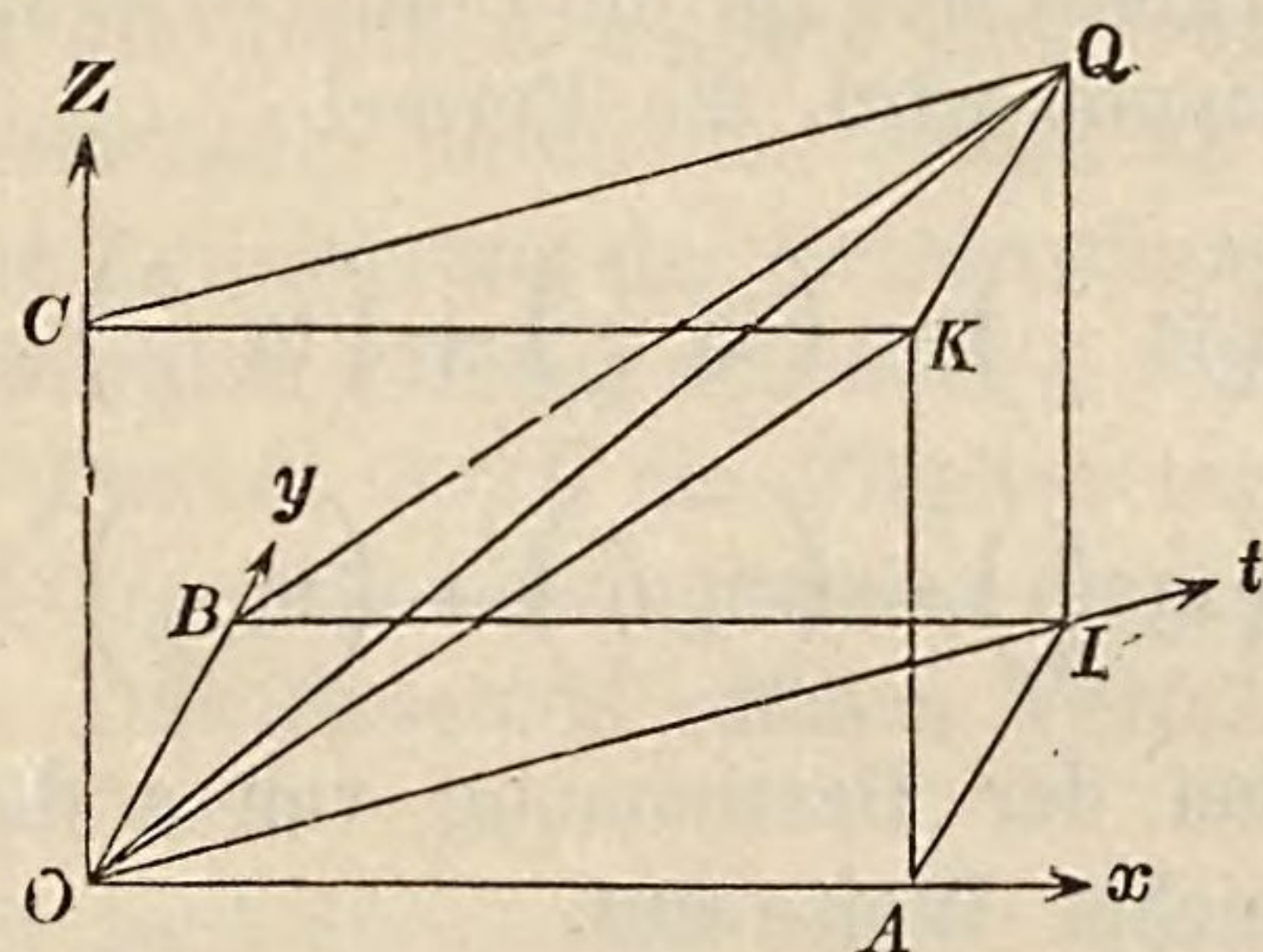
Das Befremden, welches diese Verschiedenheit des Verhaltens der beiden Coordinaten erregt, wird allerdings durch die Erwägung gemildert, dass beide Bestimmungselemente ja von vornherein nicht gleichmässig zur Verwendung kommen; ob diese Erwägung ausreicht, die ganze — in der euklidischen Geometrie überhaupt fortfallende — Erscheinung genügend aufzuklären, kann hier dahingestellt bleiben, da man durch eine Veränderung in der Bestimmungsweise dem Übelstand überhaupt abhelfen kann.

Zu dem Zwecke schneide man vom Coordinatenanfang auf beiden in ihm sich schneidenden Axen Strecken von den Längen

x und y ab, und errichte in den Endpunkten derselben zu ihnen Lote, deren Schnittpunkt dann der durch die Coordinaten x und y bestimmte Punkt sein würde. Diese Bestimmung ist offenbar in Bezug auf beide Coordinaten symmetrisch.

Will man dieselbe auf den Raum ausdehnen, so würde man auf einer dritten durch den Coordinatenanfang gehenden und zur Ebene $(x\ y)$ senkrechten Axe eine Strecke von der Länge z abschneiden, die man dann im Verein mit der Entfernung des Coordinatenanfangs von dem durch die Coordinaten x und y allein bestimmten Punkte zu einer ganz analogen Construction zu verwenden hätte.

Fig. 3.



Den Sachverhalt illustriert die vorstehende Figur, in welcher die Coordinaten x, y, z durch die Strecken OA, OB, OC dargestellt werden, während der Punkt $(x\ y)$ mit J , der Punkt (x, y, z) mit Q bezeichnet worden ist.

Die vollkommene Gleichwertigkeit der drei Fundamentalbestimmungen ergibt nun als notwendige Folge, dass man zu ganz demselben Punkte Q gelangen muss, wenn man die gegebenen Grössen x, y, z in anderer Reihenfolge verwendet, also statt erst durch x und y die neue Coordinate OJ zu bestimmen und diese dann mit z zusammenzunehmen, etwa erst x mit z , die dadurch entstehende Coordinate dann mit y combinirt.

Diese Bedingung ist in der That erfüllt, denn, wie sich leicht zeigen lässt, steht sowohl QB auf OB senkrecht, als auch QK auf OK , wenn K durch die Strecken OA und OC in analoger Weise bestimmt wird, wie J durch OA und OB bestimmt worden war.

Und dieser Zustand findet seine Bestätigung durch die Erwägung, dass man das obige Verfahren der successiven Ver-

wendung der Coordinaten x, y, z einzuschlagen gar nicht nötig hatte, man hätte unter Erweiterung des in der Ebene beobachteten Verfahrens auf den Raum durch die Punkte A, B, C Ebenen senkrecht zu OA, OB, OC legen können, und würde als deren Schnittpunkt denselben Punkt Q erhalten haben.

Um den Sachverhalt auch formelmässig zum Ausdruck zu bringen, werde die Strecke OJ mit t bezeichnet, dann hat man nach den Lehren der nichteuklidischen Geometrie für die Bestimmung von t durch x und y die Gleichung:

$$(2^a) \dots\dots\dots \left(\operatorname{tg} \frac{t}{k} \right)^2 = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{k} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{y}{k} \right)^2,$$

und entsprechend ergibt sich für die Linie $OQ = s$, welche zunächst durch t und z bestimmt wird, die Formel

$$(2^b) \dots\dots\dots \begin{cases} \left(\operatorname{tg} \frac{s}{k} \right)^2 = \left(\operatorname{tg} \frac{t}{k} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{z}{k} \right)^2, \text{ d. h.} \\ \left(\operatorname{tg} \frac{s}{k} \right)^2 = \left(\operatorname{tg} \frac{x}{k} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{y}{k} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{z}{k} \right)^2. \end{cases}$$

Demnach treten bei der Bestimmung von s die 3 Coordinaten x, y, z in ganz gleicher Weise auf.

Man kann auch noch eine andere Art der symmetrischen Coordinatenbestimmung in Anwendung bringen, die durch die bereits benutzte Figur 3 gleichfalls erläutert werden kann, wenn man den in diesen auftretenden Linien teilweise eine veränderte Bedeutung beilegt.

Um auch hier zunächst in der Ebene zu bleiben, so sollen für den durch die Coordinaten $OA = x, OB = y$ bestimmten Punkt J die Linien AJ und BJ nicht Lote auf OA und OB vorstellen, sondern vielmehr als Bogen der Linien gleichen Abstandes von der y -Axe und der x -Axe betrachtet werden. Diese Linien, die in der euklidischen Geometrie bekanntlich gerade sind und mit den in A und B auf OA und BO errichteten Loten zusammenfallen, sind in der nichteuklidischen Geometrie allerdings krumm. Doch bildet dieser Umstand kein Hindernis für die Verwendung der obigen Figur, da von ihm in der gegenwärtigen Betrachtung keinerlei Gebrauch gemacht wird.

Geht man dann zum räumlichen Coordinatensystem über, so sind entsprechend die Linien JQ und CQ als Linien gleichen

Abstandes von der z -Axe und der durch O und J gelegten t -Axe aufzufassen. Auch hier kann man nun die Forderung erheben, dass derselbe Punkt Q erhalten wird, ganz gleichgültig, ob man — wie eben geschehen — erst J durch x und y bestimmt, um dann die so erhaltene neue Coordinate t mit z zu combiniren, oder ob man etwa erst x und z zusammennehmen will, während y an dritter Stelle zur Verwendung kommt. Und auch hier zeigt eine einfache Überlegung, dass dieser Forderung in der nichteuklidischen Geometrie thatsächlich genügt ist, denn wenn man zunächst in der Ebene $(x\ z)$ zur x -Axe und zur z -Axe die Linien gleichen Abstandes CK und AK construirt, so sind die geraden Linien KO und QB , die in derselben Ebene auf OB senkrecht stehen, von gleicher Länge, also geht die durch K gelegte Linie constanten Abstandes von der y -Axe notwendig durch den Punkt Q . Man kann auch hier eine ähnliche Erweiterung der ebenen Coordinatenbestimmung auf den Raum eintreten lassen, wie oben — indem man von vornherein durch die Punkte ABC die Flächen legt, welche von den Ebenen $(y\ z)$, $(z\ x)$, $(x\ y)$ beziehungsweise die constanten Abstände x , y , z besitzen. Das Ergebnis solchen Verfahrens wäre derselbe Punkt Q .

Endlich findet auch dieser Sachverhalt seine Bestätigung durch ein ähnliches Formelsystem. Behält man die bereits benutzten Bezeichnungen bei, so hat man im vorliegenden Falle die Gleichungen

$$(3) \dots \begin{cases} \left(\sin \frac{t}{k}\right)^2 = \left(\sin \frac{x}{k}\right)^2 + \left(\sin \frac{y}{k}\right)^2 \\ \left(\sin \frac{s}{k}\right)^2 = \left(\sin \frac{t}{k}\right)^2 + \left(\sin \frac{z}{k}\right)^2 = \left(\sin \frac{x}{k}\right)^2 + \left(\sin \frac{y}{k}\right)^2 + \left(\sin \frac{z}{k}\right)^2 \end{cases}$$

und legt dem symmetrischen Auftreten von x , y , z ganz dieselbe Bedeutung bei, wie im ersten Falle.

Verfolgt man den eben dargestellten Sachverhalt näher, so sieht man, dass ein Unterschied zwischen der nichteuklidischen und der euklidischen Geometrie hier nicht in's Spiel kommt, alle die oben angestellten geometrischen Betrachtungen sind ohne Weiteres auch auf die euklidische Geometrie anwendbar, in welcher übrigens beide Constructionen — wie auch schon angedeutet worden ist — in eine zusammenfallen.

Aehnlich liegt die Sache hinsichtlich der formelmässigen Behandlung. Den oben aufgestellten Gleichungssystemen (2) und (3) steht in der euklidischen Geometrie das System gegenüber:

$$(4) \dots \begin{cases} t^2 = x^2 + y^2 \\ s^2 = t^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2, \end{cases}$$

welches übrigens von selbst sich ergibt, wenn die beiden eben gedachten Systeme in eines zusammenfallen, d. h. $\sin \frac{x}{k} = \operatorname{tg} \frac{x}{k}$, also

$$k = \infty \text{ und } k \operatorname{tg} \frac{x}{k} = k \sin \frac{x}{k} = x \text{ wird.}$$

Als charakteristisches Moment in allen drei Gleichungssystemen tritt nämlich der Umstand auf, dass die Bestimmung von t durch x und y mittels eines nach der gewöhnlichen Bezeichnung *associativen* Ausdrucks erfolgt, d. h. eines Ausdrucks, für welchen, wenn man ihn allgemein als $P(xy)$ bezeichnet, die Bedingung gilt, dass der Wert von $P(P(xy)z)$ durch beliebige Vertauschung der Grössen x, y, z nicht geändert wird. Dieser Charakter kommt aber nicht nur der euklidischen Funktion

$$t = \sqrt{x^2 + y^2}$$

zu, sondern ebensogut den nichteuklidischen Funktionen

$$t = k \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{k}\right)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{y}{k}\right)^2}$$

$$\text{und } t = k \operatorname{arcsin} \sqrt{\left(\sin \frac{x}{k}\right)^2 + \left(\sin \frac{y}{k}\right)^2},$$

wie überhaupt allen Funktionen von der Form

$$P(xy) = \varphi(f(x) + f(y)),$$

oder von der noch allgemeineren Form

$$(5) \dots \dots \dots P(xy) = \varphi[Q(f(x)f(y))],$$

wenn φ die inverse Funktion zu f ist und Q selbst eine associative Funktion vorstellt.

Wer in den so eben gegebenen Auseinandersetzungen einen Beweis für die Richtigkeit der nichteuklidischen Theorie zu finden glaubte, würde nichtsdestoweniger fehl gehen. Die Erfüllung der in den vorstehenden Betrachtungen aufgestellten Forderungen hat ihren Grund in einer Reihe von Momenten, hinsichtlich deren der Unterschied zwischen der antiken und der modernen Auffassung gar nicht in's Spiel kommt. Es wird dies auch noch durch den Umstand besonders deutlich, dass eine und dieselbe Figur für zwei Situationen verwendet werden konnte, die in der nichteuklidischen Geometrie im Uebrigen scharf von einander geschieden sind, während ihr Zusammenfallen, wie auch bereits hervorgehoben worden ist, gerade die Gültigkeit der euklidischen Geometrie bedingen würde.

Will man der Sache auf den Grund gehen, um zu einer Entscheidung in der in Rede stehenden Streitfrage zu gelangen, so muss man vielmehr sein Augenmerk auf die Momente richten, in denen der Unterschied zwischen der alten und der neuen Theorie zu Tage tritt. An solchen Momenten fehlt es nun nicht, wenn sie auch in der bisherigen Erörterung nicht zur Geltung gekommen sind. Einen wesentlichen Unterschied zwischen der euklidischen und der nichteuklidischen Theorie begründet der Umstand, dass in der Figur 3 die Winkel AJB , JQK , JQC , AKC die Grösse eines Rechten haben oder nicht, je nachdem man die euklidischen Voraussetzungen annimmt oder bestreitet. Im letzteren Falle sind die genannten Winkel spitz, sobald man die Linien AJ , BJ , JQ u. s. w. als gerade auf OA , OB , OJ u. s. w. errichtete Lote ansieht, sie sind stumpf, sobald die Linien AJ , BJ , JQ u. s. w. die Rolle der Linien constanten Abstandes von der x -Axe, der y -Axe, der z -Axe u. s. w. übernehmen.

Nun bekennt sich die nichteuklidische Geometrie ganz ebenso wie die euklidische zu dem Prinzip, dass der Raum um jeden einzelnen seiner Punkte genau so gestaltet ist, wie um jeden anderen. Dieses Prinzip ist von der erheblichsten Bedeutung für die gesuchte Entscheidung, es lässt sich aus ihm eine ganz eigentümliche Consequenz hinsichtlich des Verhältnisses zweier Punkte ziehen, von denen der zweite durch eine auf den ersten basirte Coordinatenverbindung bestimmt ist. Wenn der Raum eine für alle seine Punkte gleichmässige Constitution besitzt, kann offenbar von den beiden eben gedachten Punkten keiner vor dem anderen einen Vorzug besitzen, mit demselben Rechte, wie der erste als Ausgangspunkt für die Bestimmung des zweiten dient, muss dieser zum Ausgangspunkt einer entsprechenden Bestimmung für den ersten genommen werden können. Und da der Übergang vom zweiten zum ersten offenbar das Gegenteil des Überganges vom ersten zum zweiten ist, so müssen die Coordinaten, durch welche der erste Punkt vom zweiten aus bestimmt ist, augenscheinlich derselben Grösse, aber des entgegengesetzten Sinnes sein, als die, durch welche der zweite Punkt vom ersten aus seine Bestimmung gefunden hatte. Mit anderen Worten: Eine unabweisliche Folge der durchweg gleichmässigen Gestaltung des Raumes ist die Forderung der *Umkehrbarkeit* der in ihm vorzunehmenden Coordinatenbestimmung, eine Forderung, die man füglich

auch als einen Ausfluss der Umkehrbarkeit ansehen kann, welche — wie allen Geraden, so insbesondere — der Verbindungslinie der beiden sich gegenseitig bestimmenden Punkte zukommt.

Macht man die Anwendung auf die obige Figur, so müsste innerhalb der Ebene ($x y$) der Punkt O gerade so von J aus bestimmt werden müssen, wie es für J von O aus geschah, während im dreifach ausgedehnten Raume dieselbe Bestimmung, durch welche Q von O aus gefunden wurde, durch blosse Umkehrung der Coordinatenrichtung das Mittel geben müsste, um O von Q aus zu bestimmen.

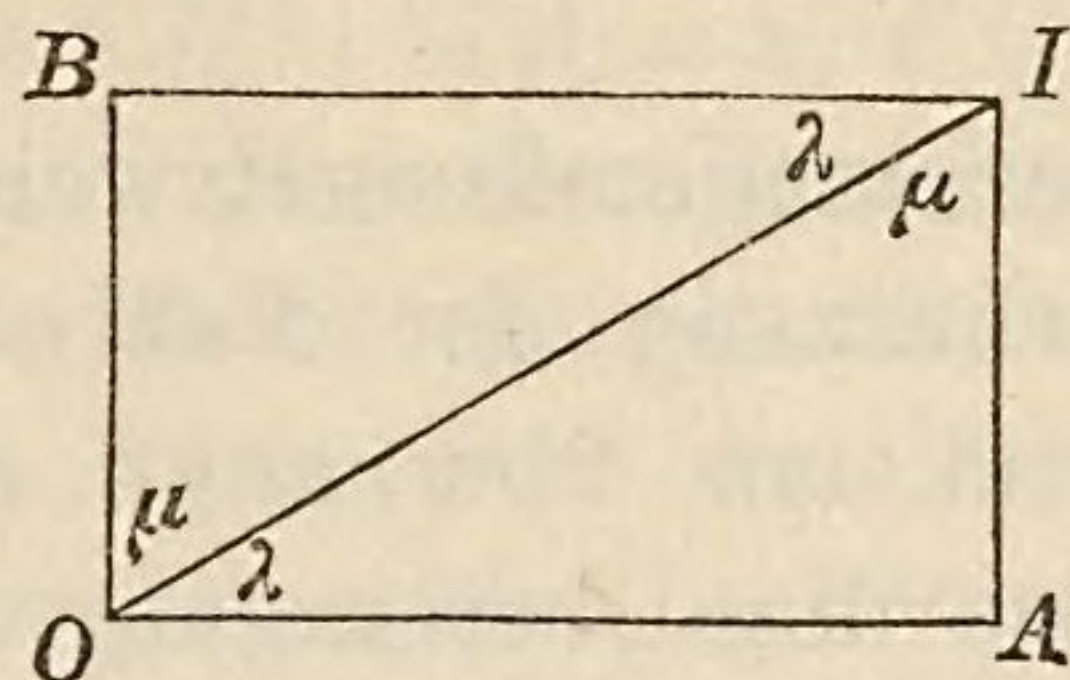
Man erkennt sofort, dass diese Möglichkeit nur dann vorliegt, wenn die oben erwähnten Winkel der in J , beziehungsweise in Q zusammenstossenden Linien Rechte sind, also im Falle der euklidischen Geometrie, man überzeugt sich auch, dass für den eben eingenommenen Standpunkt die beiden oben aufgestellten Betrachtungen nicht auf gleicher Stufe stehen, sondern hinter der erhobenen Forderung in verschiedenem Grade zurückbleiben. Bei der ersten derselben bleibt lediglich der Mangel bestehen, dass die Bestimmungscoordinaten im Gegensatz zu O , wo sie sämtlich auf einander senkrecht stehen, in J und Q Winkel von veränderlicher, je nach der Lage der Dinge sich richtender Grösse bilden. Im zweiten Falle kommt zu diesem Umstande noch der andere hinzu, dass die von J und Q ausgehenden Linien nicht, wie die von O ausgehenden gerade, sondern krumm, ja dass sie nicht einmal unter einander congruent sind, weil ja ihre Krümmung von der Grösse des constanten Abstandes bedingt wird, durch welchen sie in Bezug auf gewisse Gerade jede für sich definirt sind.

Immerhin liegt in diesem Sachverhalt noch keine directe Widerlegung der nichteuklidischen Geometrie, es geht daraus zunächst nur die Aufforderung hervor, zu untersuchen, ob nicht durch eine anderweitige Wahl des Coordinatensystems auch innerhalb des Rahmens dieser Geometrie Abhülfe geschaffen werden könnte.

Um zunächst wieder in der Ebene zu bleiben, so könnte die Abhülfe, d. h. die Erfüllung der gestellten Forderung offenbar nur in der Weise bewirkt werden, dass man, um für die Punkte O und J eine beiderseits symmetrische, umkehrbare Bestimmung zu schaffen, an die Gerade OJ in J dieselben Winkel anträgt, welche OJ in O mit den durch diesen Punkt gelegten Axen bildet. Damit die Umkehrung innerhalb der Ebene möglich ist, würde die

Antragung auch derart erfolgen müssen, dass die einander gleichen Winkel die Lage von Wechselwinkeln haben, wie es die nachstehende Figur angibt:

Fig. 4.



In dieser Figur würden nun, um keine aus dem Bereich der nichteuklidischen Geometrie herausgehenden Voraussetzungen zu machen, vorläufig nur die beiden Winkel AOB und AJB Rechte sein, während den übrigens offenbar unter sich gleichen Winkeln $JA O$ und $JB O$ diese Grösse nur im Falle der euklidischen Geometrie zukommen würde, in jedem anderen Falle würden diese Winkel spitz sein müssen. Mit Rücksicht hierauf will ich eine Figur von der Art des Vierecks $OAJB$ als *Halbrechteck*, die Verbindungslinie der Scheitel der beiden rechten Winkel als *Hauptdiagonale*, die andere Diagonale als *Nebendiagonale* bezeichnen. Wie leicht einzusehen, teilt zunächst die Hauptdiagonale, dann aber auch die Nebendiagonale das Viereck in zwei congruente Hälften, dabei halbieren sich die Diagonalen unter einander und die Gegenseiten des Vierecks sind gleich. Aus diesem Sachverhalt ergibt sich zur Bestimmung des Punktes J von O aus mittels der Coordinaten x und y folgendes Verfahren: Man ziehe von O aus in zwei beliebigen, aber auf einander senkrechten Richtungen Gerade von den Längen x und y , bis zu den Punkten A und B , halbiere die Strecke AB , und verlängere die Verbindungslinie von O mit diesem Halbierungspunkte über denselben hinaus um sich selbst, so erhält man den Punkt J durch eine, augenscheinlich völlig *umkehrbare* Construction.

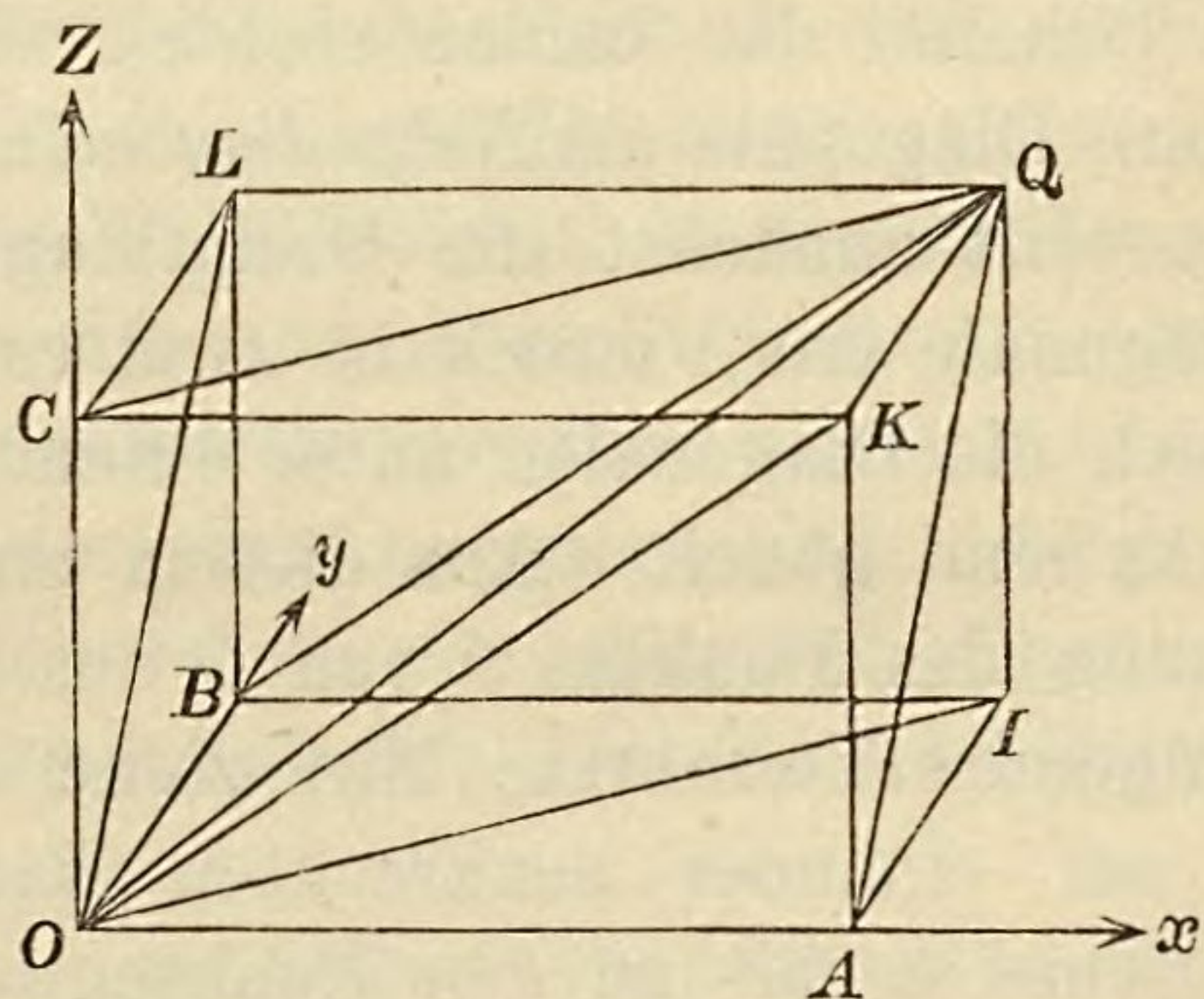
Will man nun diese Bestimmungsart auf den Raum übertragen, so ist hier von vornherein klar, dass man nicht alle drei Coordinaten auf einmal in ganz gleichmässiger Weise verwenden kann. Es liegt dies an dem Umstande, dass die Winkel OAJ und OBJ in dem oben betrachteten Viereck keine von vornherein feststehende Grösse haben, wie oben, wo — mochten nun die Linien AJ und BJ als Gerade oder als Linien constanten Abstandes von der

y -Axe und der x -Axe auftreten — diese Winkel jedenfalls Rechte waren, so dass man beim Übergange zu räumlichen Verhältnissen nur die auf OA , OB , OC senkrechten Linien durch die ihnen entsprechenden, gleichfalls auf jenen Linien senkrechten Flächen zu ersetzen brauchte.⁶⁾

Da ausserdem eine sinngemässe Erweiterung der so eben beschriebenen auf die Benutzung der Nebendiagonale des Vierecks $AOJB$ basirten Konstruktion überhaupt gar nicht denkbar ist, liegt die Sache so, dass die Übertragung der in Rede stehenden *umkehrbaren* Bestimmungsweise auf den Raum überhaupt nur unter *successiver* Verwendung der Coordinaten bewirkt werden kann.

Man würde demgemäss, um von einem Punkte O aus durch die Coordinaten x , y , z den Punkt Q zu bestimmen, zunächst mittels x und y einen Punkt J festlegen, um dann die Hauptdiagonale t des zu dieser Festlegung benutzten Halbrechtecks als neue Coordinate mit z auf die vorgeschriebene Art zu combiniren.

Fig. 5.



In der vorstehenden, zur Erläuterung dienenden Figur würden zunächst die Vierecke $OAJB$ und $OJQC$ Halbrechtecke vorstellen, deren Hauptdiagonalen die Linien OJ und OQ wären. Dabei hätte man:

$$OA = BJ = x; \quad OB = AJ = y; \quad OC = QJ = z; \quad OJ = CQ = t.$$

Nun muss man natürlich auch hier die Forderung erheben, dass das Endergebnis der Konstruktion von der Reihenfolge, in welcher die Coordinaten zur Verwendung kommen, unabhängig ist. Bildet man demgemäss aus x und z das Halbrechteck $OA KC$, so wäre dessen Hauptdiagonale OK , die in der Ebene (xz) liegt,

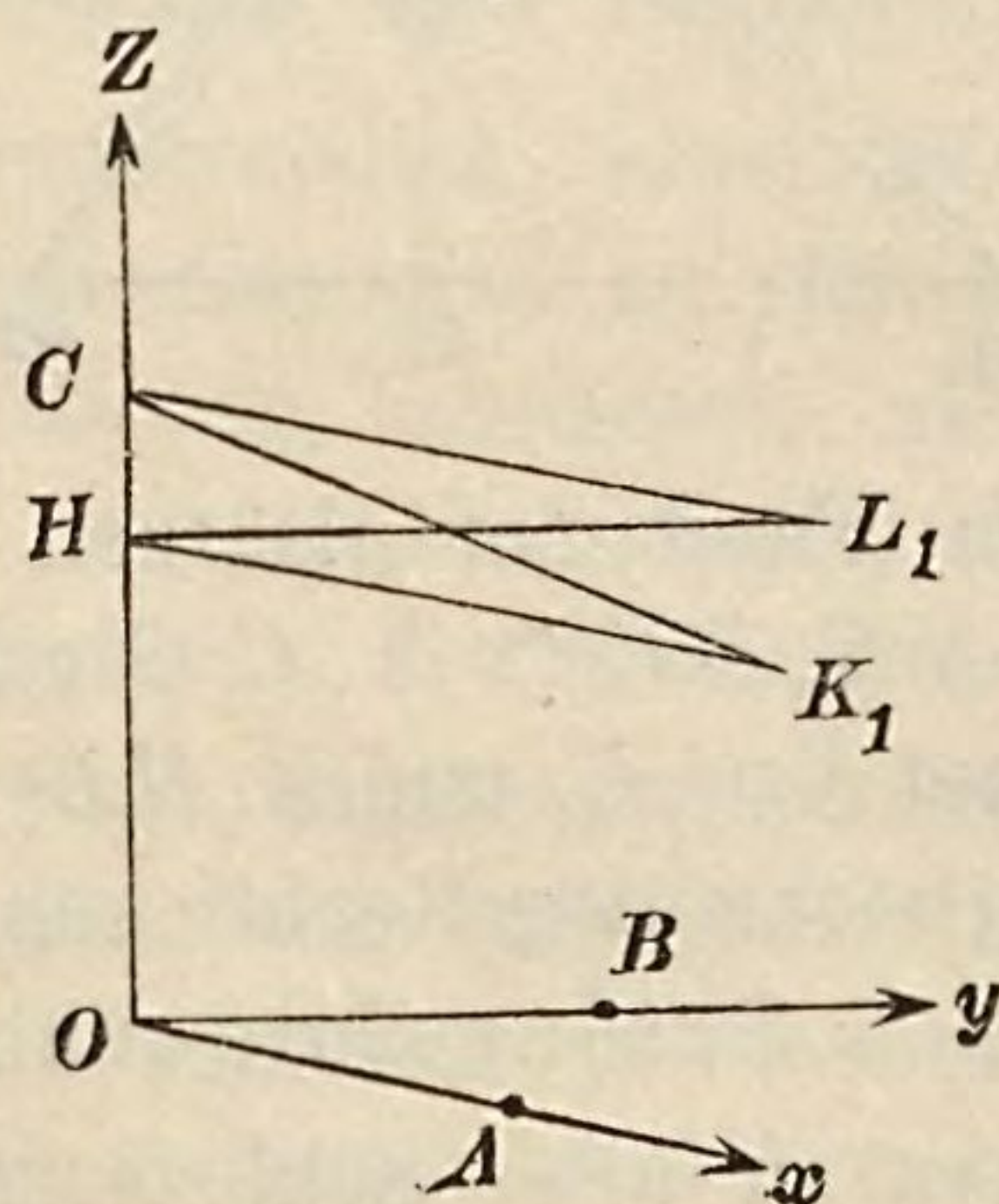
mit der auf dieser Ebene und mithin auch auf OK selbst senkrecht stehenden Strecke OB zur Bildung eines neuen Halbrechtecks zu benutzen, dessen Hauptdiagonale nach der so eben aufgestellten Forderung gerade OQ sein müsste. Bei diesen Konstruktionen würde also $CK = OA = x$, $KQ = OB = y$ sein müssen. Dagegen würden, wenn man die Coordinaten in der Reihenfolge $y, z - x$ benutzte, die Halbrechtecke $OBLC$ und $OAQL$ zu construiren sein, in denen $CL = OB = y$, $LQ = OA = x$ sein würde.

Die Vierecke $CKQL$ und $OAJB$ würden dann sämtliche Seiten und eine Diagonale (CQ , bezw. OJ) gleich haben, also congruent sein müssen. Daraus würde die Gleichheit der Winkel KCL und AOB folgen, deren homologe Schenkel jedesmal in dieselbe Ebene fallen, nämlich einerseits in die Ebene (xz) , andererseits in die Ebene (yz) .

Hier ist nun der Punkt, an welchem zwischen der euklidischen und der nichteuklidischen Anschauung gewählt werden muss. Die Gleichheit der eben genannten Winkel ist nämlich nur dann möglich, wenn die Ebene des Winkels KCL , ebenso wie die des Winkels AOB auf der z -Axe senkrecht steht. Diese, in der euklidischen Geometrie von selbst erfüllte Bedingung würde in der nichteuklidischen Geometrie nicht erfüllt sein, denn in dieser wären die Halbrechteckswinkel OCK und OCL notwendig spitze Winkel.

Dass aber unter solchen Umständen von einer Gleichheit der Winkel KCL und AOB in der That nicht die Rede sein kann, zeigt die folgende Betrachtung.

Fig. 6.

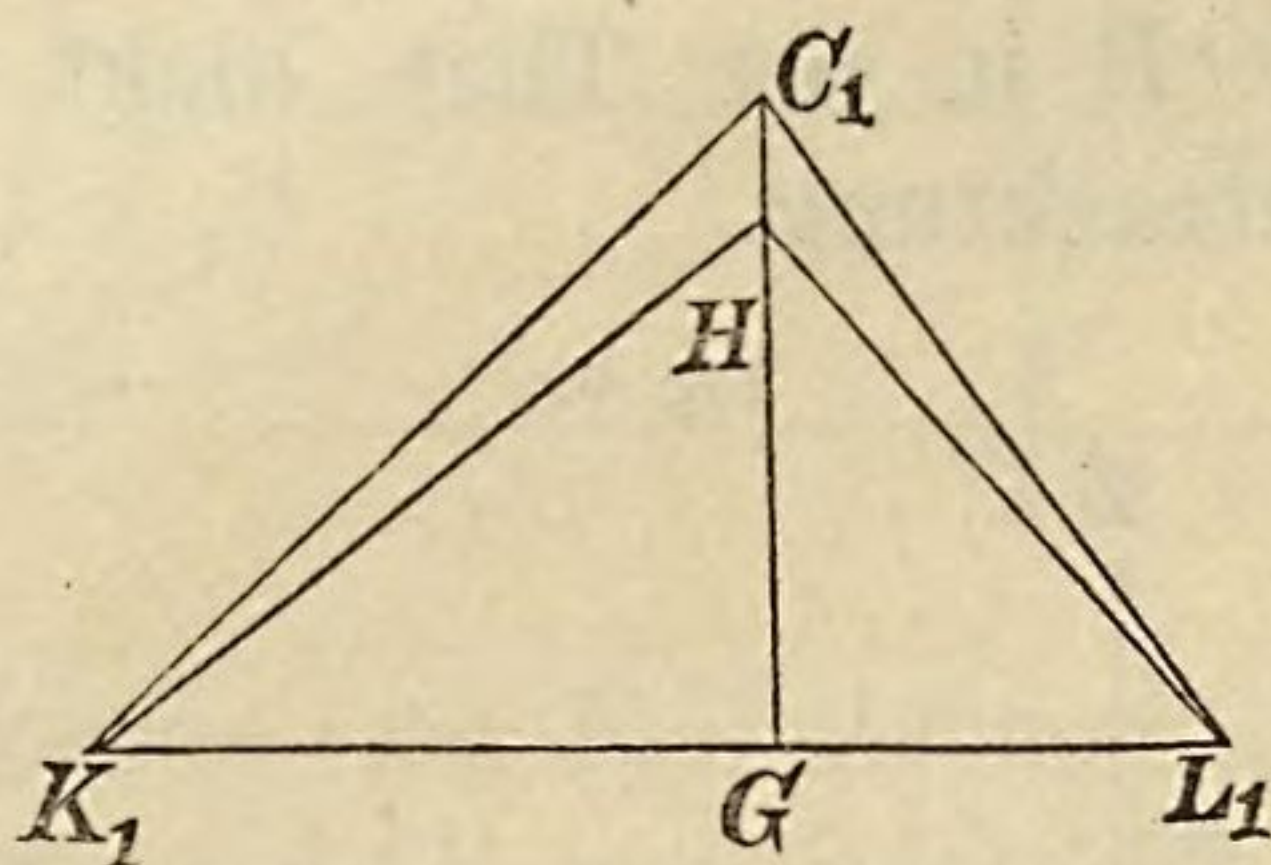


Da die Winkel OCK und OCL beide spitz sind, muss es zwischen C und O in der Nähe von C eine Schaar von Punkten

geben, von der Beschaffenheit, dass die durch einen derselben senkrecht zur z -Axe gelegte Ebene, sowohl die Linie CK als die Linie CL schneidet. Solch ein Punkt sei der Punkt H , die Schnittpunkte der eben gedachten, durch ihn gelegten Ebene mit CK und CL seien die Punkte K_1 und L_1 . Dann müsste der Winkel K_1HL_1 der ebenso wie der Winkel AOB die Neigung der Ebene (xz) gegen die Ebene (yz) misst, gleich diesem ein Rechter sein. Da ferner der Winkel K_1CL_1 wie oben nachgewiesen, auch ein Rechter sein müsste, so hätte man über der Hypotenuse K_1L_1 die beiden rechtwinkligen Dreiecke K_1HL_1 und K_1CL_1 die Katheten des letzteren wären aber wegen der Rechtwinkligkeit der Dreiecke CHK_1 und CHL_1 länger als die des ersteren.

Fällt man noch von C auf K_1L_1 das Lot CG , dessen Fusspunkt notwendig zwischen K_1 und L_1 fällt und verbindet G mit H , so ist ferner $CG > HG$, ausserdem steht nach einem bekannten der nichteuklidischen Geometrie mit der euklidischen gemeinsamen Satze HG ebenfalls auf K_1L_1 senkrecht. Dreht man dann die Ebene des Dreiecks K_1CL_1 um die Gerade K_1L_1 bis zum Zusammenfallen mit der Ebene K_1HL_1 so entsteht die nachstehende Figur, in welcher die neue Lage des Punktes C durch den notwendig auf die Verlängerung von GH fallenden Punkt C_1 dargestellt wird.

Fig. 7.



Da nun nach den Fundamentalsätzen der nichteuklidischen Geometrie notwendig $\sphericalangle K_1HG > \sphericalangle K_1C_1G$ und $\sphericalangle L_1HG > \sphericalangle L_1C_1G$ ist, so können die Winkel $K_1C_1L_1$ und K_1HL_1 , d. h. die Winkel KCL und AOB nicht beide gleichzeitig Rechte sein, im klaren Widerspruch mit der obigen Schlussfolgerung.

Demnach kann man in aller Schärfe den Satz aussprechen: Die eindeutige umkehrbare Bestimmung zweier Punkte des Raumes durch einander, wie sie durch das Prinzip

der überall gleichmässigen Gestaltung des Raumes gefordert wird, ist nur möglich, wenn in der oben betrachteten Figur der Winkel HCK dem Winkel AOB gleich ist, demnach die Ebene HCK auf der z -Axe senkrecht steht und jedes der bisher als Halbrechtecke bezeichneten Vierecke lauter rechte Winkel enthält, d. h. unter Annahme der Voraussetzungen der euklidischen Geometrie.

Um auch hier die geometrische Erörterung durch eine algebraische Analyse zu begleiten, sei in Kürze darauf hingewiesen, dass für die Länge t der Hauptdiagonale des aus den Seiten x und y gebildeten Halbrechtecks die Gleichung gelten würde:

$$(6) \dots \left\{ \begin{array}{l} \left(\sin \frac{t}{k} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{\left(\sin \frac{x}{k} \cdot \sin \frac{y}{k} \right)^2}{\left(\sin \frac{x}{k} \right)^2 + \left(\sin \frac{y}{k} \right)^2} + 1 \right\} \\ - 2 \cos \frac{t}{k} \cos \frac{x}{k} \cos \frac{y}{k} + \left(\cos \frac{x}{k} \right)^2 + \left(\cos \frac{y}{k} \right)^2 \end{array} \right\} = 0,$$

deren Auflösung nach t einen in x und y zwar augenscheinlich symmetrischen, aber — wie leicht zu sehen — *nicht associativen* Ausdruck gibt.⁷⁾

III.

Über die Beweiskraft der Raumtheorien von Helmholtz, Riemann und Beltrami.

Es ist nunmehr unabweislich, einen Blick auf gewisse sehr allgemein gehaltene Betrachtungen zu richten, die von den Vertretern der nichteuklidischen Geometrie als gewichtige Stützen ihrer Lehre angesehen werden, ich meine die bereits erwähnten Abhandlungen von Helmholtz, Riemann und Beltrami.

Die Riemannsche Arbeit, wie der zweite der beiden Beltramischen Aufsätze beschäftigen sich von vornherein mit einem Raume von beliebiger Dimensionszahl, auf dieses Thema, das auch von Helmholtz wenigstens gestreift wird, wird im folgenden Abschnitte dieser Schrift näher eingegangen werden. Ebenso wird die ausführliche Würdigung der von Helmholtz und Riemann zur Sprache ge-

brachten Grundfrage, in wiefern die Prinzipien der Raumlehre gewisse Erfahrungselemente in sich enthalten, erst später erfolgen. An dieser Stelle soll vor allem die Bedeutung geprüft werden, welche die genannten Abhandlungen für die Frage der nicht-euklidischen Gestaltung des dreifach ausgedehnten Raumes besitzen. Wenn diese Besprechung sich zunächst der zweiten Helmholtzschen Abhandlung zuwendet, obwohl dieselbe (der Heidelberger Vortrag) nicht nur später erschienen ist, als die Aufsätze von Riemann und Beltrami, sondern auch auf diese direct Bezug nimmt, so rechtfertigt sich dies Verfahren dadurch, dass die Auseinandersetzung mit jener wenigstens in dem gegenwärtigen Zusammenhange am einfachsten ist.

Was nämlich der *Helmholtzschen* Erörterung ihren ganz besonderen Character verleiht, das ist die Hypothese einer Raumgestaltung, innerhalb deren eine Übertragung der Raumgebilde von Ort zu Ort nicht ohne Grössenveränderung der übertragenen Gebilde möglich, vielmehr mit einer Dehnung verbunden ist, ohne dass die den Raum bewohnenden Wesen von solcher Dehnung etwas merken könnten, weil die ihnen zu Gebote stehenden Massstäbe von solcher Dehnung mit betroffen würden. Die Frage der Berechtigung solcher Hypothese wird von den im vorletzten Abschnitt dieser Schrift zur Geltung gebrachten Gesichtspunkten zu prüfen sein, im vorliegenden Zusammenhange genügt es darauf hinzuweisen, dass die gedachte Annahme von der sonst überall über die Natur des Raumes gemachten und insbesondere auch im Vorstehenden benutzten Voraussetzung der Gleichwertigkeit für alle Punkte und alle Richtungen offenbar absieht, dass also die Helmholtzschen Deductionen, soweit sie durch diese Annahme bedingt sind, die vorstehend gegebene Beweisführung ebensowenig widerlegen können, als sie allerdings auch — in diesem Stadium der Untersuchung — durch sie widerlegt werden.

In allen anderen Beziehungen erklärt Helmholtz, dass er durch seine eigenen Untersuchungen zu wesentlich denselben Ergebnissen, wie Riemann und Beltrami gelangt sei. Die weiterhin folgende eingehende Erörterung der Theorien dieser beiden Mathematiker bezieht sich demgemäss auch auf die Helmholtzsche Auffassung. Immerhin ist es nicht überflüssig, auf einige nicht unbedenkliche oder wenigstens der Klarstellung bedürftige Einzelheiten der Helmholtzschen Auseinandersetzung hinzuweisen.

Unter der *Ebene* will Helmholtz, wie es scheint, ein nur in der euklidischen Geometrie auftretendes Gebilde verstanden wissen.⁸⁾ Demgegenüber muss betont werden, dass in dem Bolyaischen System der geometrische Ort aller auf einer Geraden in demselben Punkte senkrecht stehenden Geraden eine Ebene von ganz derselben definitionsmäßigen Beschaffenheit wie die euklidische Ebene ist; auch sie soll die Eigenschaft haben, dass jede Gerade, die zwei ihrer Punkte verbindet, ihrer vollen Länge nach in sie hineinfällt. Und hinsichtlich des Begriffes der *Geraden* besteht ja auch zwischen der euklidischen und der nichteuklidischen Geometrie nicht der geringste Unterschied, für jede der beiden Theorien ist die Gerade die durch zwei Punkte eindeutig bestimmte Punktfolge — denn das unterscheidende Moment, die Auffassung des Parallelenverhältnisses hat ja, wie ausdrücklich bemerkt wird, mit dem Begriff der Geraden nichts zu thun, sondern geht angeblich die Erfahrung an, und ist aus dieser zu beurteilen und zu entscheiden.

Über den Begriff der Geraden herrscht bei Helmholtz überhaupt eine gewisse Unklarheit, insofern er die Begriffe *Gerade* und *kürzeste Linie* im euklidischen Raume dergestalt mit einander identificirt, dass er auch die Analoga zu den ebenen Geraden (*Geradeste* nach seiner Bezeichnung) auf den krummen Flächen, beziehungsweise im „nicht ebenen“ Raume ohne Weiteres als kürzeste Linien definirt. Demgegenüber muss hervorgehoben werden, dass die Eigenschaft der kürzesten Linie im Begriff der Geraden nicht von vornherein enthalten ist, die geometrische Theorie, auch des nichteuklidischen Systems, versteht unter solcher Linie nur die durch zwei ihrer Punkte völlig eindeutig bestimmte Punktfolge und befindet sich dabei in voller Übereinstimmung mit *Kant*, der die Behauptung, dass solche Linie von allen Verbindungen zwischen zwei Punkten die kürzeste sei, für den Inhalt eines nur durch Zuhülfenahme der Anschauung zu gewinnenden *synthetischen* Satzes erklärt.⁹⁾ Helmholtz kehrt den Sachverhalt um, er definirt die Gerade als kürzeste Linie zwischen zwei Punkten und bezeichnet den Satz, dass zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich sei, als eines der geometrischen *Axiome*.¹⁰⁾

Was ihn zu solchem Vorgehen veranlasst, wird durch eine an anderer Stelle gemachte Bemerkung klar, des Inhalts, dass eine von allen zufälligen und irrtümlich hineingetragenen Elementen

freie Untersuchung des Inhalts der Raumvorstellung nur durch die mit messbaren Grössen operirende Formel möglich sei¹¹⁾). Wie wenig er berechtigt ist, zu sagen, dass schon die Definition der Geraden, weil sie eben dieselbe für die kürzeste Linie erklärt, auf eine *Grössenbestimmung* hinauslaufe¹²⁾, ist so eben hervorgehoben worden, aber auch seine anderen Beispiele¹³⁾ sind unzutreffend. Ein Satz, der die Gleichheit gewisser Winkel aussagt, enthält in erster Linie nicht eine Grössenbestimmung, sondern eine Lagenbeziehung, denn um die Gleichheit einzusehen, muss man ja die als gleich ausgegebenen Winkel zur Deckung bringen können. Dasselbe gilt von dem Satze, nach welchem die Winkelsumme des Dreiecks gleich oder kleiner als zwei Rechte ist, denn die Entscheidung über die Richtigkeit dieses Satzes wird doch nur durch Aneinanderlegung der Dreieckswinkel und demnächstige Betrachtung der Lage gewonnen, welche die Schenkel des so entstehenden Winkels gegen die Schenkel eines gestreckten Winkels einnehmen.

Wenn Helmholtz von „den rein rechnenden Grössenbestimmungen“ die Beseitigung der „Gefahr“ erwartet, „dass sich gewohnte Anschauungsthatsachen als Denknöthwendigkeiten unterschieben“¹⁴⁾, so ist dies völlig unberechtigt.

Denn wenn man fragt: womit operirt die Formel?, so kann man doch nur antworten: sie ist eine Zusammenstellung von Buchstaben, Zahlen und algebraischen Zeichen, denen an sich gar keine selbstverständliche Bedeutung beiwohnt, eine solche muss vielmehr von aussen hineingetragen werden. Die Angabe, dass $a < b$ ist, hat, losgelöst von aller Anschauung, gar keinen Sinn, sie bekommt einen solchen erst dadurch, dass ich mir unter a und b *extensive*, räumlich von mir anzuschauende Dinge denke, deren Grössenverhältnis ich durch wenigstens in Gedanken versuchte Deckung ermittle.

Ähnliches gilt von den Zahlen. Die sogenannte *unbenannte* Zahl ist wörtlich genommen ein vollkommener Nonsens, der Satz, dass 5 grösser als 3 ist, hat ohne eine stillschweigend hinzuge dachte Benennung beliebiger Art gar keinen Sinn. In der That ist das Operiren mit den unbenannten Zahlen ja auch nur so zu verstehen, dass man von der speziellen Art der Benennung absieht, d. h. man stellt ein System von Sätzen auf, die auf alle denkbaren Benennungen ganz gleichmässig Anwendung finden, aber erst durch

die nach jeder Richtung hin offene Möglichkeit der Benennung einen Sinn bekommen, den sie ohne diese immer den Hintergrund der Betrachtung bildende Möglichkeit überhaupt nicht haben würden. Das heisst: auch für die Gewinnung des Begriffs der Zahl ist die Anschauung der neben einander existirenden und dadurch erst der Zählung fähigen Objekte ein unentbehrliches Moment.¹⁵⁾

Nicht anders steht es mit dem Begriff der Addition, beziehungsweise dem der durch die Addition zu Stande kommenden Summe, beides sind Begriffe, denen ohne die Anschauung des Nebeneinander jeder Inhalt fehlen würde. Erst die weiteren algebraischen Begriffe, die sämtlich aber nur mit Hülfe des Summenbegriffes gewonnen werden, verlieren die unmittelbare Beziehung zur Anschauung.

Und angesichts dieses Sachverhaltes muss man wohl sagen: die Meinung, dass man erst durch Operiren mit „rechnenden Grössenbestimmungen“ eine unantastbare Basis der Betrachtung gewinne, beruht auf einem verhängnisvollen Irrtum. Nicht nur, dass die Grössenbestimmungen, die als Erklärungsmittel der Anschauung dienen sollten, selbst vielmehr aus der Anschauung von Lagenbeziehungen erwachsen sind, bei dem mechanisch geübten Hantiren mit den Bestandteilen der Formeln liegt auch die Gefahr vor, zu völlig inhaltlosen, ja selbst widersinnigen Ergebnissen zu gelangen, weil man durch die Leichtigkeit dieses Hantirens nur zu sehr in Versuchung gerät, eine Prüfung der Grenzen für seine Berechtigung ganz zu unterlassen.

Wie leicht dabei die Formel an die Stelle der Sache tritt, zeigt sich ganz besonders auch in der Riemannschen Abhandlung, auf die Helmholtz eben wegen des in derselben durchgeführten Operirens mit Maassverhältnissen besonders nachdrücklich Bezug nimmt. Die *Riemannschen* Ausführungen, deren philosophischer Gehalt ebenso wie der der Helmholtzschen Abhandlung noch weiterhin seine Würdigung finden wird, nehmen — soweit sie zu mathematisch greifbaren Folgerungen führen — als Ausgangspunkt einen Ausdruck für das *Linienelement*. Dieses soll demnach durch die Quadratwurzel aus einer immer positiven ganzen homogenen Funktion des zweiten Grades von der Differentialen der Raumcoordinaten dargestellt werden, bei welcher die Coëfficienten stetige Funktionen der Coordinaten selbst sind¹⁶⁾, d. h. wenn man

die von Riemann ohne Beschränkung auf eine bestimmte Dimensionszahl des Raumes gegebene Formel auf die innerhalb der Erfahrung liegenden Verhältnisse des dreifach ausgedehnten Raumes anwendet, so würde das vom Punkte (xyz) ausgehende Linien-element im Raume den Wert

$$(7) \dots\dots ds = \sqrt{a dx^2 + b dy^2 + c dz^2 + e dy dz + f dz dx + g dx dy},$$

und in der Ebene den Wert

$$(8) \dots\dots dt = \sqrt{a dx^2 + b dy^2 + g dx dy}$$

besitzen, indem die Grössen $abc efg$ Funktionen von xyz vorstellen.

Für die euklidische Geometrie würden diese Formeln die einfachere Gestalt

$$(9) \dots\dots \begin{cases} ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ dt = \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{cases}$$

annehmen.

Damit die Ausdrücke (7) und (8), die 6, beziehungsweise 3 Coëfficienten enthalten, in die Ausdrücke (9), welche dreigliedrig, beziehungsweise zweigliedrig sind, transformirt werden können, müssen jene Coëfficienten gewissen Bedingungen genügen, die Raumformen, für welche solche Transformation möglich ist, bezeichnet Riemann als *eben*, seine Worte wie auch die weiterhin folgenden Betrachtungen lassen dabei gar keinen Zweifel, dass er die in den Gleichungen (9) zum Ausdruck kommende Beschaffenheit nicht nur für eine Ebenheit in den kleinsten Theilen, sondern für das Characteristicum des Zustandes ansieht, welcher, wenn man sich auf drei Dimensionen beschränkt, die Grundlage der euklidischen Geometrie bildet, er nennt einen solchen Raum im Gegensatz zu den sonst von ihm betrachteten *Mannigfaltigkeiten*, schlechtweg den (uns erfahrungsmässig bekannten) *Raum*.¹⁷⁾ Darauf erörtert er in einer an anderer Stelle¹⁸⁾ noch ausführlicher dargelegten Weise, dass der Betrag, um welchen das Quadrat des Linienelements bei den nicht ebenen Räumen von dem ihm im ebenen Raume zukommenden Werte abweicht, von einer gewissen Grösse abhängt, die als eine Erweiterung des Gauss'schen Ausdruckes für das Flächenkrümmungsmaass auf den Fall von beliebig vielen Variablen angesehen werden kann¹⁹⁾. Endlich discutirt er noch ganz speziell den Fall, in welchem dieses Krümmungsmaass überall *denselben* Wert besitzt, dann nimmt nach einer von ihm

ohne weiteren Beweis gemachten Angabe²⁰⁾ der Ausdruck für das Linienelement die Form an:

$$(10) \dots\dots ds = \frac{\sqrt{\Sigma dx^2}}{1 + \frac{\alpha}{4} \Sigma x^2},$$

unter α das constante Krümmungsmaass des überall gleichmässig „gekrümmten“ Raumes verstanden. Solcher Raum hat übrigens, wie er noch besonders hervorhebt, die Eigenschaft, dass in ihm die Figuren sich ohne Dehnung bewegen lassen²¹⁾.

Die Riemannsche Abhandlung spricht von vornherein nicht von Räumen, sondern von n -fach „ausgedehnten Mannigfaltigkeiten“, unter welchen Begriff auch der Raum fällt. Bei diesem Vorgehen stellt sich Riemann zunächst auf einen sehr allgemeinen Standpunkt, den er erst im Laufe seiner Untersuchung einigermaassen spezialisirt. Ursprünglich erörtert er die Möglichkeit, eine n -fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit in eine solche von $n-1$ Dimensionen und eine einfach ausgedehnte zu zerlegen oder umgekehrt aus diesen beiden Elementen zusammenzusetzen²²⁾, im zweiten Teil seiner Abhandlung untersucht er dann die „Maassverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede messbar ist²³⁾.“ Dabei kommt er auf den erstangegebenen Ausdruck (S. 34) für das Linienelement, den er dann für Räume von constanter Krümmung in die unter No. (10) angegebene Form bringt. Über solche Räume sagt er wörtlich:

„Andererseits aber sind durch das Krümmungsmaass die „Maassverhältnisse der Mannigfaltigkeit vollständig bestimmt; „es sind daher um einen Punkt nach allen Richtungen die „Maassverhältnisse genau dieselben, wie um einen anderen, „und also von ihm aus dieselben Constructionen ausführbar „und folglich kann in den Mannigfaltigkeiten mit constantem „Krümmungsmaass den Figuren jede beliebige Lage gegeben „werden²⁴⁾.“

Hiemit bekennt sich auch Riemann ausdrücklich zu dem Prinzip der überall gleichmässigen Gestaltung des Raumes.

Dass die von ihm aus seiner Auffassung gezogenen Folgerungen durch die Bezugnahme auf die Verhältnisse der constant ge-

krümmten Raumgebilde durchaus keine Stütze finden, wird weiterhin noch eingehend dargelegt werden, immerhin könnte seine Theorie trotz des verfehlten Beweisverfahrens an sich richtig sein. Ich behaupte indessen, dass dies, auch abgesehen von seiner Beweisführung, nicht zutrifft, dass die ganze Riemannsche Theorie unmöglich ist und aus ihr selber widerlegt werden kann.

Zunächst widerspricht der Ausdruck für das Linienelement

$$ds = \frac{\Sigma dx^2}{1 + \frac{\alpha}{4} \Sigma x^2}$$

dem Prinzip der Gleichwertigkeit sämtlicher Punkte des Raumes. Dieser Ausdruck macht das Linienelement abhängig von den Coordinaten des Ortes, das Linienelement bekommt demnach einen durchaus verschiedenen Wert je nach der Wahl des Coordinatenanfanges. Während es sich für den Fall, wo der betrachtete Punkt mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt, also $\Sigma x^2 = 0$ ist, auf den Zähler des von Riemann gegebenen Ausdruckes reducirt, ist es in jedem anderen Falle davon verschieden. Es ist aber klar, dass die ganz äusserliche Wahl des Coordinatenanfanges im überall gleichmässig gestalteten Raume auf die Grösse des Linienelementes keinen Einfluss haben darf.

Ebensowenig entspricht der Riemannsche Ausdruck für ds der Forderung einer gleichmässigen Gestaltung des Raumes für alle von demselben Punkte ausgehenden Richtungen. Um dieses zur Evidenz zu zeigen, soll die Riemannsche Formel beispielsweise auf den dreifach ausgedehnten Raum angewendet werden, für den sie dann bei Bezeichnung der drei Coordinaten durch die Buchstaben x, y, z die Gestalt annimmt

$$(11) \dots ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{N},$$

wenn man den Nenner des Riemannschen Ausdruckes, weil er für die verschiedenen von dem betrachteten Punkte ausgehenden Richtungen unveränderlich ist, mit N bezeichnet.

Nun hebt ja Riemann selbst hervor, dass eine jede Ortsbestimmung auf eine Bestimmung in einer Mannigfaltigkeit von einer um Eins geringeren Dimensionszahl und eine einfach ausgedehnte Bestimmung zurückgeführt werden kann.

Lässt man in Ausführung dieses Prinzips das in der z -Richtung genommene Differential bis zum Verschwinden abnehmen, so erhält man für das in der Ebene ($x y$) auftretende Linienelement den Wert

$$(12) \dots dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{N}.$$

Die vollkommene gegenseitige Unabhängigkeit der Coordinaten bedingt es nun, dass das Linienelement im Raume aus dem mittels der Differentiale dx und dy enthaltenen Differential dt und dem dritten noch nicht verwendeten Differential dz gerade auf dieselbe Art erhalten werden muss, wie dt aus dx und dy entstand, dass also

$$(13) \dots ds = \frac{\sqrt{dt^2 + dz^2}}{N} = \frac{\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{N^2} + dz^2}}{N} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + N^2 dz^2}}{N^2}$$

sein müsste. Mit der Gleichwertigkeit der verschiedenen vom Punkte (xyz) ausgehenden Richtungen ist dieses Ergebnis völlig unvereinbar, da in ihm die Grössen dx , dy , dz nicht unter einander vertauscht werden können. Denn hätte man bei der Verwendung der Differentiale dx , dy , dz eine andere Reihenfolge beobachtet, beispielsweise zunächst dx und dz combinirt, und das Ergebnis dieser Combination mit dy verbunden, so würde man das von dem obigen Ausdruck abweichende Resultat

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + N^2 dy^2 + dz^2}}{N^2}$$

erhalten haben. Die Gültigkeit der unter Nr. (10) angegebenen Riemannschen Formel lässt sich also aus der Riemannschen Theorie selber widerlegen, und zwar ist die Möglichkeit dieser Widerlegung darin begründet, dass der für das Linienelement gegebene Ausdruck

$$ds = \frac{\Sigma dx^2}{1 + \frac{\alpha}{4} \Sigma x^2}$$

nicht associativ ist. Diese Eigenschaft erlangt er erst dadurch, dass der Nenner den Wert *Eins* erhält, also $\alpha = 0$ ist, d. h. durch den Zustand, den Riemann als den mit dem Krümmungsmaass *Null* behafteten, den *ebenen* bezeichnet, mit anderen Worten: durch die Annahme der euklidischen Geometrie.

Wenn Riemann einmal darauf ausging, seine Theorie auf den überall, d. h. in allen Punkten und nach allen Richtungen hin

gleichmässig gestalteten Raum anzuwenden, so konnte er auch schon von dem zuerst von ihm aufgestellten, oben (auf Seite 34) angegebenen Ausdruck für das Linienelement zu dem Schluss kommen, dass diese Gleichmässigkeit nur für den Wert des Linienelements bestehen kann, den er als Characteristicum des von ihm sogenannten *ebenen* Raumes bezeichnet.

Um dieses einzusehen, soll die Darlegung auch hier auf die dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit beschränkt werden, die ohnehin — wie später gezeigt werden wird — allein eine reelle Existenz besitzt, übrigens ist — wie sofort einleuchtet — die Art des Beweises von dieser Beschränkung ganz unabhängig. Die Untersuchung des Einflusses, den jede der beiden Seiten der dem Raume beiwohnenden Gleichmässigkeit auf den Ausdruck für das Linienelement in ganz bestimmter Weise ausübt, führt dabei zu einem auch an sich interessanten Ergebnis. Betrachtet man demgemäss den oben unter No. (7) gegebenen Ausdruck für das Linienelement

$$ds = \sqrt{a dx^2 + b dy^2 + c dz^2 + e dy dz + f dz dx + g dx dy},$$

so zieht man zunächst aus der Forderung der vollkommenen Gleichwertigkeit des Raumes *für sämtliche Punkte* den Schluss, dass die Coefficienten $a b c e f g$ von der Wahl des jeweiligen Punktes unabhängig sein, also *absolute Constanten* sein müssen.

Neben den aus der *Gleichmässigkeit* des Raumes *für alle Punkte* sich ergebenden Folgerungen bestehen die Consequenzen, zu denen die Forderung der Gleichmässigkeit *nach allen Richtungen* führt. Aus dieser Forderung lässt sich eine Unabhängigkeit der Werte von $a b c e f g$ gegen die Coordinaten des Punktes $x y z$ nicht ohne Weiteres herleiten, da ja diese Unabhängigkeit nur durch die Vergleichung mehrerer Punkte unter einander bedingt wurde, während hier zunächst nur von einem Punkte die Rede ist. Dagegen führt die Gleichwertigkeit der Richtungen zu dem Ergebnis, dass jedenfalls in dem Ausdruck für ds die Grössen dx, dy, dz unter sich beliebig vertauschbar sein müssen, dies ist aber offenbar nur möglich, wenn zugleich

$$a = b = c; e = f = g$$

ist. Dadurch nimmt der Ausdruck für das Linienelement die Form

$$(14) \dots ds = \sqrt{a (dx^2 + dy^2 + dz^2) + e (dy dz + dz dx + dx dy)} \\ \text{an.}$$

Aber diese Bedingung genügt nicht, um die Unabhängigkeit des Linienelementes von der Richtung zur vollkommenen Geltung zu bringen. Dazu ist nicht nur erforderlich, dass die einmal gewählten Richtungen x, y, z unter sich gleichwertig sind, es muss vielmehr jedes der drei Grundelemente dx, dy, dz zu einem aus dem beiden anderen combinirten neuen Grundelement in derselben Beziehung stehen, wie zu jedem einzelnen dieser Grundelemente selbst, d. h. wenn man durch zwei von diesen Elementen ein in ihrem Bereich (in ihrer Ebene) liegendes neues Element bestimmt, um dann dieses mit dem noch übrigen dritten Element in der durch die Formel vorgeschriebenen Art zu combiniren, so muss das Ergebnis von der Reihenfolge, in welcher die drei Grundelemente zur Verwendung kommen, unabhängig, also der Endausdruck in dx, dy, dz symmetrisch sein. Mit anderen Worten: für den durch die Annahme $dz=0$ aus der Formel (14) entspringenden Ausdruck

$$(15) \dots dt = \sqrt{a(dx^2 + dy^2) + e dx dy}$$

besteht die Forderung, dass er *associativ* ist. Man sieht sofort, dass diese Bedingung nur für $a=1, e=0$ erfüllt ist.

Hierin ist die auch an sich höchst bemerkenswerte Thatsache enthalten, dass die Forderung der Gleichwertigkeit des Raumes nach allen Richtungen eine viel grössere Tragweite besitzt, als die der Gleichwertigkeit in allen Punkten, dass sie ganz allein genügt, um dem Raume die Beschaffenheit zu verbürgen, die von Riemann als *eben* bezeichnet wird, d. h. die von der euklidischen Geometrie behauptete Beschaffenheit.

An diesem Resultat ändert nun auch die Deutung nichts, welche den Riemannschen Deductionen durch Beltrami zu Teil geworden ist. Allerdings zeigt ja *Beltrami* in seiner zweiten Abhandlung²⁵⁾, dass der zweite (oben unter No. (10) angegebene) Riemannsche Ausdruck für das Linienelement durch gewisse Transformationen aus dem hervorgeht, der für seine eigene Betrachtungen den Ausgangspunkt bildet. Die Interpretation der Beltramischen Formeln kommt also, soweit sie berechtigt ist, auch der Riemannschen Theorie zu gute, aber diese Interpretation besitzt selbst nur eine durch ganz bestimmte Voraussetzungen eingeschränkte Gültigkeit.

Schon am Schlusse des ersten Abschnittes dieser Schrift ist hervorgehoben worden, dass die Interpretation, welche Beltrami den

Formeln der nichteuklidischen Planimetrie durch die Betrachtung der Verhältnisse auf den Flächen von constanter negativer Krümmung verleiht, für die Gültigkeit der nichteuklidischen Geometrie im Bereiche der geradlinigen und ebenen Gebilde gar nichts beweist, denn die geodätischen Linien auf den von Beltrami untersuchten Flächen haben zwar mit den geraden Linien mancherlei Eigenschaften gemein, aber gerade die Haupteigenschaft, die Umkehrbarkeit geht ihnen ab. Und in der Nichtbeachtung dieser Haupteigenschaft wurzelt eben, wie auch schon im Eingang des zweiten Abschnittes gelegentlich bemerkt worden ist, die Möglichkeit der von Beltrami dargelegten Versinnlichung.

Die Erweiterung, die Beltrami den Ausführungen seiner ersten Abhandlung in der zweiten zu Teil werden lässt, trägt nun von vornherein einen wesentlich analytischen Character²⁶⁾, allerdings erhalten die Formeln, zu denen Beltrami gelangt, eine gewisse Deutung, die sich übrigens durchweg an die aus der herkömmlichen Geometrie, beziehungsweise der Bolyai-Lobatschewskyschen Theorie herrührenden Begriffe anlehnt, aber für die Entscheidung der Frage, ob der Raum die ihm in diesen Interpretationen zugeschriebene Beschaffenheit wirklich besitzt, ist die ganze Beweisführung belanglos.

Freilich erörtert ja Beltrami die Übertragbarkeit der Raumgebilde innerhalb der von ihm betrachteten Räume durch jede mögliche Drehung und Verschiebung, er thut dies sowohl für die in seinem ersten Aufsatz betrachteten zweidimensionalen Gebilde in der diesem Aufsatz beigefügten Note II²⁷⁾, als in der zweiten Abhandlung auf ähnliche, doch etwas summarischer²⁸⁾ gehaltene Art für die Raumgebilde im Allgemeinen. Aber seine Argumentation erschöpft sich vollständig in dem Nachweis, dass bei solcher Übertragung die inneren Verhältnisse der bewegten Raumstücke sich nicht ändern, er operirt nämlich nur mit den Ausdrücken für die Längen der Linien des in diesen Raumstücken angenommenen Grundliniensystems. Wie wenig damit für die absolute Übertragbarkeit gewonnen ist, erkennt Beltrami wenigstens für die zweidimensionalen Gebilde selbst an, wenn er in der eben erwähnten Note zu seinem ersten Aufsatz sagt²⁹⁾:

„Natürlich bezieht sich diese Gleichheit nur auf die Längen der Linien und die Grösse der Winkel, da ja die absolute Krümmung der Linien hier nicht in Betracht gezogen wird.“

Dieser Satz findet selbstverständlich auf den Fall von mehr als zwei Dimensionen ganz gleichmässig Anwendung, da ja die für diesen Fall angestellten Betrachtungen genau von derselben Art sind, wie die im zweidimensionalen Bereich zur Geltung gebrachten. Im übrigen bestätigt Beltrami damit nur die Folgerungen, zu denen allein schon die Betrachtung seines Ausdruckes für das Linienelement führt.

Dieser Ausdruck lautet nämlich in seiner auf n Variable zugeschnittenen Gestalt

$$(16) \dots ds = \frac{\sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_n^2} x^2 + (x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n)^2}{x^2},$$

wenn $x^2 = a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$, $a = \text{const.}^{30)}$ Er erfüllt ebenso wenig, wie der aus ihm durch gewisse Transformationen abzuleitende Riemannsche Ausdruck, die Forderung, die oben als unabweislich für den Ausdruck des Linienelements im absolut homogenen Raume hingestellt worden ist, die nämlich, in den Variablen associativ zu sein. Es ist demnach auch nicht wunderbar, dass das von Beltrami auf Grund seiner Formeln construirte Coordinatensystem, welches durch die nach demselben unendlich fernen Punkt hinstrebenden geodätischen Linien („Geradesten“ nach Helmholtzscher Bezeichnung) und die diese Linien normal durchsetzenden überall gleichmässig gestalteten „Grenzflächen“ der Lobatschewskyschen Theorie gebildet wird,³¹⁾ von vornherein einen nicht nach allen Richtungen gleichmässig ausgebildeten Charakter trägt.

Hier muss noch einmal auf die *Riemannsche* Abhandlung zurückgegangen werden, um die Unrichtigkeit der Angaben zu betonen, welche von Riemann gerade in dieser Hinsicht gemacht werden. Derselbe sagt an einer bereits oben (S. 35) erwähnten Stelle seiner Abhandlung:

„Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren „Krümmungsmaass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung bewegen lassen. Denn offenbar würden die Figuren in ihnen „nicht beliebig verschiebbar und drehbar sein können, wenn „nicht in jedem Punkte in allen Richtungen das Krümmungsmaass dasselbe wäre. Andererseits aber sind durch das „Krümmungsmaass die Maassverhältnisse der Mannigfaltigkeit „vollständig bestimmt, es sind daher um einen Punkt nach „allen Richtungen die Maassverhältnisse genau dieselben, wie

„um einen anderen, und also von ihm aus dieselben Constructionen ausführbar, und folglich kann in den Mannigfaltigkeiten mit constantem Krümmungsmaass den Figuren jede beliebige Lage gegeben werden.“

Thatsächlich ist dies eben nicht der Fall, denn die Möglichkeit der Bewegung ohne Dehnung schliesst nicht die Erhaltung der Form in sich, auf die hier alles ankommt. Für diese ist vielmehr die Manier wesentlich, in welcher die Verhältnisse im dreifach (eventuell n fach) ausgedehnten Raume auf die im zweifach (beziehungsweise $(n-1)$ fach) ausgedehnten Raumgebilde herrschenden derart zurückgeführt werden, dass die Ordnung, in welcher dabei die Richtungen des Raumes successive in Betracht gezogen werden, gleichgültig ist, d. h. bei den Formeln giebt die *associative* Bildung der auftretenden Ausdrücke den Ausschlag.

Es ist auffallend, dass Riemann auf diese Seite des von ihm behandelten Themas nicht selbst aufmerksam geworden ist, da doch das Prinzip, die mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten auf solche von geringerer Dimensionszahl, schliesslich also auf die von zweifacher Ausdehnung zurückzuführen, seine ganze Arbeit durchdringt.³²⁾

Im Gegensatz zu den übertriebenen Formeldeutungen Riemanns sind die Vorbehalte Beltramis um so bemerkenswerter. Namentlich kommt hier die folgende Erklärung in Betracht:³³⁾

„Das wesentlichste Element der Figuren und der Constructionen in der Geometrie ist die Gerade. Der spezifische Charakter dieser Linie ist der, allein schon durch zwei ihrer Punkte des Raumes derart völlig bestimmt zu sein, dass zwei Gerade nicht durch zwei gegebene Punkte gehen können, ohne in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenzufallen. Indessen wird in der ebenen Geometrie dieses Moment nicht in seinem ganzen Umfange verwandt, da, wie man bei näherer Betrachtung sieht, die Gerade in den planimetrischen Betrachtungen ja nur in Gemässheit des folgenden Postulats Verwendung findet: Wenn man zwei Ebenen, auf deren jeder eine Gerade existirt, zusammenfallen lässt, genügt es, dass die beiden Geraden zwei Punkte gemeinsam haben, damit sie überhaupt zusammenfallen.“

Er führt dann weiter aus³⁴⁾, dass diese so formulirte Eigenschaft nicht nur den Geraden, sondern auch den geodätischen Linien auf den

Flächen von constanter negativer Krümmung zukommt. Damit bestätigt die Beltramische Abhandlung unmittelbar selbst alle Ausführungen, die gegen die von den Vertretern der nichteuklidischen Geometrie ihr beigelegte Beweiskraft am Schlusse des ersten Abschnitts und beiläufig im Eingange des zweiten Abschnitts vorgebracht worden sind.³⁵⁾

Neben der Deutung, die die Riemannschen Formeln durch Beltrami gefunden haben, ist nun aber auch noch die Beweisführung zu erörtern, die *Helmholtz* für die von Riemann ohne speziellere Begründung gegebenen Ausdrücke für das Linienelement nachträglich gegeben zu haben behauptet. Diese Beweisführung, die er auch in seiner zweiten, oben besprochenen Abhandlung andeutet³⁶⁾, findet sich in eingehender Darstellung in der ersten (*Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen*). Über die physikalischen Probleme, die ihm nach seiner eigenen Angabe als Anlass zu den jetzt zu besprechenden mathematischen Entwicklungen gedient haben, kann dabei um so mehr hinweggegangen werden, als er sich in dieser Hinsicht auf einige kurze Andeutungen³⁷⁾ beschränkt, ausserdem aber auch die Frage, ob es zulässig ist, die Grundlagen der Geometrie auf Erfahrungsmomente zu basiren, im vorletzten Abschnitt der vorliegenden Schrift eine eingehende Würdigung finden wird.

Als thatsächliche Basis seiner Rechnung nimmt *Helmholtz* für den Raum schliesslich auch seinerseits die in allen Punkten und nach allen Richtungen gleichmässige Constitution an, die freilich in seinen Augen nicht als eine Denknotwendigkeit, sondern nur als eine Erfahrungsthatfache erscheint und diesen Charakter auch in den seine Auffassung ausdrücklich formulirenden Sätzen deutlich verrät. Denn wenn er sagt³⁸⁾ (*Voraussetzung III*), „dass zwei in sich feste Punktsysteme *A* und *B*, die in einer ersten Lage von *A* zur Congruenz entsprechender Punkte gebracht werden konnten, auch in jeder anderen Lage von *A* zur Congruenz aller derselben Punkte, die vorher congruirten, müssen gebracht werden können,“ oder wenn er in der *Voraussetzung IV*³⁹⁾ es als eine *nicht notwendige* Annahme hinstellt, „dass zwei congruente Körper auch noch congruent sind, nachdem der eine eine Umdrehung um eine Rotationsaxe erlitten hat“, so prägt sich hierin nur dieselbe Verwechselung zwischen dem rein transcendentalen *Begriff der*

Congruenz und der *Frage nach dem etwaigen thatsächlichen Vorhandensein der Congruenz* aus, die weiterhin noch (im vorletzten Abschnitt dieser Schrift) an der Hand der diese Verwechslung noch viel deutlicher zum Ausdruck bringenden zweiten Helmholtzchen Abhandlung eingehend aufgezeigt werden wird.

Von der schliesslich jedenfalls gemachten Annahme des überall gleichmässig gestalteten Raumes gelangt nun Helmholtz durch umständliche Entwicklungen zu einem Ausdruck für das Linien-element in folgender Form:⁴⁰⁾

$$(17) \dots\dots dS = \sqrt{d\xi^2 + \kappa d\eta^2 + \kappa d\zeta^2},$$

in welcher die Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ lineare homogene Funktionen von gewissen anderen Differentialen (dr , ds , dt) sind. Er behauptet damit den Ausgangspunkt der Riemannschen Abhandlung gewonnen, die von Riemann selbst gegebene nicht ausreichende Begründung seiner Formeln gehörig ergänzt zu haben.⁴¹⁾

Diese angebliche Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Helmholtzschen und den Grundlagen der Riemannschen Deduction ist nun von vornherein nur mit Vorbehalt zuzugeben. Der oben mitgeteilte (übrigens von Helmholtz gleich von Anfang an auf den dreifach ausgedehnten Raum beschränkte) Ausdruck deckt sich mit keiner der beiden Formeln, die Riemann für das Linien-element aufgestellt hat, weder mit der allgemeineren, die oben unter Nr. (7) in ihrer auf drei Variable eingerichteten Gestalt angegeben ist, noch mit der spezielleren unter Nr. (10), beziehungsweise Nr. (11) wiedergegebenen.

Im Vergleich mit der ersten Riemannschen Formel trägt die Helmholtzsche Angabe offenbar einen viel spezielleren Character, was freilich auch nicht Wunder nehmen kann, sobald man berücksichtigt, dass Riemann bei Aufstellung jener Formel im Beginne seiner Arbeit das Prinzip von der überall gleichmässigen Gestaltung des Raumes noch nicht in vollem Umfange verwendet. Er spricht dort nur von einem Zustande, bei dem die Länge der Linien unabhängig von der Lage ist.

Mit der zweiten Riemannschen, oben unter No. (10), beziehungsweise unter No. (11) mitgetheilten Formel lässt sich das Resultat der Helmholtzschen Rechnung nur dann vereinigen, wenn man in diesem $\kappa = 1$, in der Riemannschen Angabe $\alpha = 0$ setzt. Da aber bei Helmholtz die Grösse κ überhaupt willkürlich ist, so hat man zwischen ihm und Riemann zunächst einen directen Widerspruch.

Nun kann man die Helmholtzsche Beweisführung allerdings dahin abändern, dass die Grösse κ den Wert *Eins* erhält, ja man ist sogar dazu genötigt, wenn man erwägt, dass der von ihm gegebene Ausdruck No. (17) vermöge des *ungleichen* Auftretens der drei Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ der ausdrücklichen Voraussetzung der nach allen Richtungen gleichmässigen Constitution des Raumes widerstreitet. Durch Betrachtungen ganz ähnlicher Art wie die, welche vorhin an die Riemannschen Formeln geknüpft worden sind, lässt sich zeigen, dass die Grösse κ den Wert *Eins* haben *muss*, wenn die Voraussetzung der überall gleichmässigen Gestaltung des Raumes nicht hinfällig werden soll.

Es ist auch nicht schwer, den Fehler in der Helmholtzschen Deduction aufzudecken. Helmholtz kommt durch lange Entwicklungen zu dem Ziele, eine von einer einzigen Variablen η abhängende Bewegung, bei welcher zwei Punkte in Ruhe bleiben, durch drei simultane Gleichungen zu charakterisiren, die nach seiner Angabe lauten⁴²⁾:

$$(18) \dots\dots \frac{dX}{d\eta} = 0, \quad \frac{dY}{d\eta} = -\omega Z, \quad \frac{dZ}{d\eta} = \omega Y.$$

Diese Gleichungen repräsentiren nach seiner Auslegung eine Drehung des ganzen Coordinatensystems um die beiden Punkte $Y=0$, $Z=0$. Für eine Drehung um die beiden Punkte $X=0$, $Z=0$ stellt er nun höchst inconsequenter Weise das System von Gleichungen auf⁴³⁾:

$$(19) \dots\dots \begin{aligned} \frac{dX}{d\eta'} &= \alpha_0 X + 0 + \gamma_0 Z \\ \frac{dY}{d\eta'} &= \alpha_1 X + 0 + \gamma_1 Z \\ \frac{dZ}{d\eta'} &= \alpha_2 X + 0 + \gamma_2 Z, \end{aligned}$$

von dem aus er dann durch sehr umständliche Entwicklungen zu seinem Ausdruck für das Linienelement gelangt. Man sieht sofort, dass bei dieser ganz ungleichmässigen Behandlung der drei Grössen X , Y , Z , welche den in Formel (17) angeführten Differentialen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ proportional sind, ein in den letztgenannten Grössen symmetrischer Ausdruck nicht herauskommen kann. Die Helmholtzsche Deduction lässt sich indessen verbessern.⁴⁴⁾

Ersetzt man nämlich die Gleichungen (19) durch ein Gleichungssystem von der Form (18), etwa durch das System:

$$(20) \dots \frac{dX}{d\eta_2} = \varphi Z, \quad \frac{dY}{d\eta_2} = 0, \quad \frac{dZ}{d\eta_3} = -\varphi X,$$

drückt man ferner eine Drehung um die Punkte $X=0$ und $Y=0$ in entsprechender Weise durch das dritte System aus

$$(21) \dots \frac{dX}{d\eta_3} = -\psi Y, \quad \frac{dY}{d\eta_3} = \psi X, \quad \frac{dZ}{d\eta_3} = 0,$$

und bildet die totalen Differentiale dX , dY , dZ , so erhält man:

$$(22) \dots \dots \dots \begin{aligned} dX &= \varphi Z d\eta_2 - \psi Y d\eta_3 \\ dY &= \psi X d\eta_3 - \omega Z d\eta \\ dZ &= \omega Y d\eta - \varphi X d\eta_2, \end{aligned}$$

und daraus sofort:

$$(23) \dots X dX + Y dY + Z dZ = 0,$$

also:

$$(24) \dots X^2 + Y^2 + Z^2 = \text{const.},$$

woraus, wenn man — in Übereinstimmung mit Helmholtz — die Integrationsconstante dem Quadrate des Linienelementes proportional setzt, und entsprechend die Grössen X , Y , Z durch die ihnen proportionalen Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ausdrückt, die Formel resultirt:

$$(25) \dots dS = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}.$$

Es führt also die verbesserte Helmholtzsche Erörterung direct⁴⁵⁾ zu dem Ausdruck für das Linienelement, den Riemann als Characteristicum des von ihm sogenannten *ebenen* — d. h. bei Beschränkung auf drei Coordinaten des euklidischen — Raumes bezeichnet. (Vgl. S. 34.)

Wie unberechtigt die Deutungen sind, die Helmholtz seinem Resultat gibt, wenn er im § 4 seiner Abhandlung sagt, dass er die Congruenz des Raumes in seinen kleinsten Teilen erwiesen habe, liegt auf der Hand. Bei der Form, die er für das Linienelement herleitet, besteht diese Congruenz nicht mehr für die Veränderungen, die durch Drehungen um einen festen Punkt hervorgerufen werden; modificirt man seinen Beweiskgang derart, dass der Ausdruck für das Linienelement auch bei Drehung um den Ausgangspunkt desselben seinen Wert behält, so gelangt man über die Helmholtzsche Deutung hinaus zu dem Zustande, den Riemann als das Characteristicum des euklidischen Raumes bezeichnet. Damit werden denn von selbst alle weiteren Erörterungen

über die Möglichkeit von Räumen mit beliebigem Krümmungsmaass, insbesondere auch von endlichen („sphärischen“ oder „elliptischen“) Räumen hinfällig.

Fast könnte man hiernach sich versucht fühlen, die Helmholtzsche Rechnung in ihrer verbesserten Gestalt für einen directen Beweis der Gültigkeit des euklidischen Systems anzusehen, indessen überzeugt man sich bald, dass die Tragweite des ganzen, von Helmholtz zur Anwendung gebrachten, Rechnungsverfahrens überhaupt sehr gering ist. Von demselben ist eine wirkliche Aufdeckung des inneren Gehalts unserer Raumvorstellung schon deshalb nicht zu erwarten, weil es wesentlich auf Anwendung der von der Infinitesimalrechnung gelehrtten Methoden beruht.

Wenn Helmholtz, Riemann und Beltrami, statt mit Raumgebilden von endlicher Ausdehnung, mit dem Linienelement operiren, so ist der Ursprung dieses Vorgehens wohl in der Meinung zu suchen, dass man nur auf solchem Wege der Möglichkeit einer *stetigen* Veränderung von Ort zu Ort gerecht werden könne. Dafür muss man nun von vornherein die Beschränkung in den Kauf nehmen, dass man im Grunde genommen über den Raum als Ganzes gar nichts erfährt, das von allen nicht in ihm selbst liegenden Zuthaten befreite Resultat der Rechnung ist thatsächlich lediglich eine Aussage über die Umgebung des als Ausgang der Coordinatendifferentiale dienenden Punktes. Einen Aufschluss über den Raum im Ganzen gebenden Inhalt würde die Rechnung erst durch die Integration erhalten, die aber nach Lage der Dinge der zu ihrer wirklichen Ausführung erforderlichen Bestimmtheit von vornherein entbehrt.

Wenn gleichwohl an den Ausdruck für das Linienelement so weitgehende Schlüsse geknüpft werden, wenn z. B. Riemann den oben unter No. (9) mitgetheilten Ausdruck für das Characteristicum des euklidischen, den unter No. (10) mitgetheilten für das Kennzeichen des überhaupt nach allen Richtungen hin gleichmässig ausgedehnten Raumes erklärt, so ist dies nur dadurch möglich, dass in die Rechnung gewisse — an sich nicht in ihr liegende — Momente von aussen hineingetragen werden, wie dies bei Riemann z. B. durch den seine ganze Auffassung beeinflussenden Begriff des Krümmungsmaasses geschieht. Über die Bedeutung, die der Einführung dieses Begriffs in die Rechnung beizumessen ist, wird im nächsten Abschnitt eingehender gehandelt werden.

Die Sache hat indessen noch eine andere Seite, auch für die Ermittlung der in der unmittelbaren Umgebung eines Punktes herrschenden Verhältnisse bedarf das durch die Methoden der Infinitesimalanalysis gefundene Resultat einer gehörigen Prüfung auf den ihm beizumessenden Wert. Differentiationen und Integrationen sind Ausführungen des Gedankens, eine stetige Veränderung als eine Folge von unendlich vielen, unendlich kleinen sprungweisen Veränderungen zu betrachten. Die Zulässigkeit dieser Betrachtungsweise ist keineswegs selbstverständlich, sie erfordert vielmehr eine eingehende Rechtfertigung, ohne welche alle mit ihrer Hülfe gewonnenen Ergebnisse eine grundlegende Bedeutung nicht beanspruchen können. Solche Rechtfertigung ist aber in voller Schärfe gar nicht einmal möglich, denn das ganze Verfahren ist seiner Natur nach ein Notbehelf, ein — vielleicht praktisch unentbehrliches — darum aber doch immer nur rohes, am Kern der Sache vorbeigehendes Mittel, eine organische Bildung durch Aneinanderleimung der verschiedenen in ihr enthaltenen Elemente äusserlich begreiflich und fassbar zu machen. Es steht im Ganzen auf derselben Stufe, wie die in der modernen Naturphilosophie beliebte Methode, die an den Erfahrungsobjecten beobachteten Eigenschaften auf die unmessbar kleinen Elementarkörper zu übertragen, aus denen man die Körper von endlicher Ausdehnung zusammengesetzt glaubt, als ob man auf solche Art für die an den letzteren wahrgenommenen Erscheinungen durch die erst von denselben abstrahirten und nur an eine andere (fingirte) Stelle übertragenen Begriffe eine die wirkliche Einsicht fördernde Erklärung jemals gewinnen könnte.

Wie weitgehend in der That diese Analogie ist, kann man u. a. daraus ersehen, dass vielfach die Meinung herrscht, durch Untersuchungen, wie die Helmholtzsche und andere derselben verwandte Betrachtungen der modernen Raumtheorien werde der Beweis geführt, dass auch innerhalb des nichteuklidischen Raumes die euklidische Geometrie für unendlich kleine Gebiete Geltung besitze.

Diese eingeschränkte Gültigkeit der euklidischen Geometrie durch derartige Infinitesimalbetrachtungen zu erweisen wäre zugleich unmöglich und unnötig, weil dieselbe in den genannten Betrachtungen *implicite* bereits vorausgesetzt worden ist.

Wenn man — wie dies z. B. auch Helmholtz fortwährend thut⁴⁶⁾ — in Ausführung der von der Differentialrechnung gegebenen Vorschriften das totale Differential einer von zwei (oder mehreren) Variablen abhängenden Grösse durch die Formel ausdrückt:

$$(26) \dots du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy,$$

so steckt in diesem Ausdruck, wie die Gestalt desselben zweifellos erkennen lässt, die stillschweigende Annahme, dass die Reihenfolge, in welcher die zur Totaländerung von u mitwirkenden unabhängigen Differentiale dx und dy zur Verwendung kommen, völlig gleichgültig ist. Ob ich vom Punkte (x, y) erst auf der x -Axe um dx , dann senkrecht dazu um dy fortschreite, oder ob ich erst auf der y -Axe das Stück dy , dann senkrecht dazu das Stück dx zurücklege, ich gelange immer zu demselben Punkte $(x + dx, y + dy)$, dem der Wert $u + du$ in gleicher Weise zugeordnet ist, wie dem Punkte (x, y) der Wert u . D. h. es existirt ein unendlich kleines Viereck mit drei einzelnen rechten Winkeln, dessen Gegenseiten paarweise gleich (nämlich mit den Werten dx und dy behaftet) sind. In diesem — völlig den Character der Fig. 9 des letzten Abschnittes dieser Schrift tragenden — Viereck muss offenbar auch der vierte Winkel ein rechter sein, womit denn der Nachweis geführt ist, dass die Infinitesimalanalysis die Geltung der euklidischen Geometrie im Bereich der unendlich kleinen Gebilde stillschweigend voraussetzt.

Es ist dies in dreifacher Weise lehrreich. Zum ersten zeigt sich hier aufs Neue, wie wenig die modernen Raumtheorien das Verdienst beanspruchen können, die eigentliche Quelle unserer Raumerkenntnis aufgezeigt zu haben, da sie ja in ihrem innersten Kerne auf denselben Annahmen beruhen, die sie wegen ihrer angeblichen Unzulänglichkeit durch besser begründete ersetzen wollen. Zweitens enthüllt sich auch hier wieder die Gefährlichkeit des Verfahrens, bei dem die sachliche Anschauung durch die algebraische Umformung in den Hintergrund gedrängt wird, die verhängnisvolle Überschätzung der Tragweite dieser Umformungen, wie sie durch die Leichtigkeit ihrer gewohnheitsmässig erfolgenden Ausführung begünstigt wird. Drittens aber gewinnt man aus dem eben besprochenen Sachverhalt auch eine Andeutung des Weges, auf welchem eine einwandfreie Begründung der Ausgangspunkte der Geometrie allein zu erlangen ist.

Die oben unter No. (26) mitgeteilte Formel kommt ja nur dadurch zu Stande, dass man, nachdem der von dx herrührende Zuwachs zu u in Rechnung gestellt ist, annimmt, es mache keinen Unterschied, ob man bei dem nun in Betracht zu ziehenden, durch die Wirkung von dy sich ergebenden Zuwachs für $u + \frac{du}{dx} dx$ einfach wieder u setzt, es ist dies bekanntlich die angeblich erlaubte *Vernachlässigung der Differentiale höherer Ordnung*. Dieses — wie schon bemerkt — als Mittel zur Bewältigung der Stetigkeit nur den Character des Notbehelfs tragende Verfahren würde ganz einwandfrei sein, wenn die die Grössenänderung von u repräsentirende Linie eine Gerade wäre, weil dann wirklich die Voraussetzung erfüllt sein würde, dass die Grössenänderung ganz gleichmässig, in jedem neuen Punkte immer wieder in derselben Weise erfolgte. Und gerade hierin liegt der Kern des von der Infinitesimalrechnung beobachteten Verfahrens, dasselbe beruht auf der Annahme, dass in unendlich kleinen Zeiträumen oder auf unendlich kleine Strecken alle Zustandsänderungen in völlig gleichmässiger Weise vor sich gehen, sie überträgt eben auf solche unendlich kleine Gebiete den Sachverhalt, wie er im Endlichen da in Kraft steht, wo die Gleichmässigkeit der Änderung durch irgend welche Umstände verbürgt ist; ja zu solcher Übertragung auf die *rein fictiven* unendlich kleinen Verhältnisse würde ja gar keine Möglichkeit vorhanden sein, wenn nicht die dorthin übertragene Gleichmässigkeit durch ihr Auftreten innerhalb der für endliche Gebiete gültigen Betrachtungen uns bereits geläufig wäre.

Das ist der Inhalt des Prinzips, welches die unendlich kleinen Teile der krummen Gebilde als gerade (oder eben) zu betrachten erlaubt. So roh diese Auffassung auch — wie bemerkt — genannt werden muss, für die krummen Gebilde (oder die ungleichmässig verlaufenden physikalischen Vorgänge) hat sie jedenfalls den Wert des einzigen bisher bekannten Mittels, der ewig wechselnden Änderung derselben überhaupt beizukommen. Völlig unberechtigt aber ist die Infinitesimalbetrachtung bei den geradlinigen Gebilden (oder den in fortwährend gleicher Weise sich abspielenden Naturvorgängen), weil sie ja überhaupt nur in einer Übertragung der von diesen Gebilden abstrahirten Gleichmässigkeit auf die Elementarbestandteile der ungleichmässig sich ändernden Objecte besteht,

bei den geradlinigen Gebilden würde die Zurückführung auf ihre Differentiale ein vollkommenes Drehen im Kreise bedeuten.

Alles dies findet nun noch ganz besondere Anwendung auch auf den Raum, vermöge seiner — ihm schliesslich auch von Helmholtz und Riemann zuerkannten — durchweg gleichmässigen Gestaltung. Jede durch Änderung *einer* Coordinate entstehende Linie ist notwendig aus lauter in sich congruenten Teilen zusammengesetzt, diese Zusammensetzung sichert ihr die überall gleichmässige Grössenänderung, auf Grund deren mit ihr *als einem Ganzen* ohne Weiteres operirt werden kann. Darum stellt es eine völlige Verkennung des Sachverhaltes dar, wenn man die Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie auf die Betrachtung des Linienelements basiren will, diese Untersuchung verspricht einen Erfolg nur, wenn sie sich auf die als Träger der Coordinaten dienenden, *beliebig ausgedehnten* Linien richtet, indem sie zugleich der Gleichwertigkeit aller solcher Richtungen durch die *associative* Natur der von ihr vorgenommenen Operationen Rechnung trägt.

Die planmässige Durchführung dieses Gedankenganges bleibt dem letzten Abschnitt dieser Schrift vorbehalten.

IV.

Zusammenhang der nichteuklidischen Geometrie mit der Frage nach der Dimensionszahl des Raumes.

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt worden ist, entbehrt ein Raum, in welchem das Linienelement durch den Riemannschen oder den mit diesem verwandten Beltramischen Ausdruck dargestellt wird, der von allen Geometern als das wesentlichste Merkmal unserer Raumanschauung erklärten Eigenschaft, nämlich der Gleichmässigkeit in allen Punkten und nach allen Richtungen.

Ein ganz neues Licht fällt aber auf diesen Sachverhalt noch durch den Begriff des Krümmungsmaasses, den sowohl Riemann als Beltrami — beide allerdings unabhängig von einander und auch, wie sich zeigen wird, nicht in gleicher Weise — bei Darlegung ihrer Raumtheorien verwenden.

Zunächst ist das Wort „Krümmungsmaass“ eine anscheinend willkürliche Bezeichnung für einen gewissen, eng mit dem Ausdruck für das Linienelement zusammenhängenden Ausdruck, die

Folgerungen, die sich aus dieser Auffassung ergeben, sind so eben dargelegt worden. Indessen beschränken auch Riemann und Beltrami sich nicht auf diese rein formelle Auffassung, vielmehr hat für sie, wie dies die Wahl des Wortes ja auch von vornherein vermuten lässt, der Begriff des Krümmungsmaasses einen greifbaren Inhalt, und dieser Inhalt stellt sich naturgemäss als eine Verallgemeinerung der Bedeutung dar, welche der Begriff in der Theorie der Flächen besitzt, denn aus der Betrachtung der Flächen stammt er ja überhaupt her, wenn man ihn nicht sogar noch weiter bis zu den Linien verfolgen will.

Diese Verallgemeinerung ist nun aber bei Riemann in anderer Weise erfolgt als bei Beltrami.

Riemann sagt in seiner Abhandlung an einer Stelle:⁴⁷⁾

„Hiernach wird man eine bestimmte Fläche erhalten, wenn
„man sämtliche von dem gegebenen Punkte ausgehenden und
„in dem gegebenen Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen
„zu kürzesten Linien verlängert, und diese Fläche hat in dem
„gegebenen Punkte ein bestimmtes Krümmungsmaass, welches
„zugleich das Krümmungsmaass der n -fach ausgedehnten Mannig-
„faltigkeit in der gegebenen Flächenrichtung ist“

und weiterhin:⁴⁸⁾

„In einer *ebenen* n -fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist das
„Krümmungsmaass in jedem Punkte in jeder Richtung *Null*“ . . .
„Die Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmaass überall $= 0$
„ist, lassen sich betrachten als ein besonderer Fall der
„Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmaass allenthalben
„constant ist.“

Weil man theoretisch für eine variable Grösse, die irgendwo den Wert Null hat, auch einen von Null verschiedenen Wert setzen kann, geht Riemann von dem uns allein thatsächlich bekannten mit dem Krümmungsmaass Null behafteten euklidischen Raume auf den Fall eines Raumes über, der überall ein von Null verschiedenes Krümmungsmaass besitzen soll — ohne auch nur eine Prüfung für nötig zu halten, ob, beziehungsweise unter welchen Voraussetzungen solcher Übergang überhaupt möglich ist, ja er ist von der Berechtigung der von ihm vorgenommenen Begriffserweiterung so überzeugt, dass er an den eben zuletzt citirten Satz die bereits oben mitgetheilten (S. 41) angeführten Sätze anschliesst:

„Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungmaass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung bewegen lassen. Denn offenbar würden die Figuren in ihnen nicht beliebig verschiebbar und drehbar sein können, wenn nicht in jedem Punkte in allen Richtungen das Krümmungmaass dasselbe wäre.“

Beide Sätze, deren zweiter übrigens nicht sowohl eine Begründung, als eine Wiederholung des im ersten Gesagten bietet, zeigen auf das Deutlichste, dass Riemann das Recht zu der von ihm vorgenommenen Begriffserweiterung für ein augenscheinliches und selbstverständliches hält.

Nun ist ja oben nachgewiesen worden, dass bei Annahme des Riemannschen Wertes für das Linienelement, der wieder durch seine Auffassung des Krümmungmaasses bedingt ist, das Prinzip der gleichmässigen Gestaltung des Raumes für alle Punkte und nach allen Richtungen nicht aufrecht erhalten werden kann, dass also die Riemannsche Auffassung in der von jeder Einschränkung freien Art, auf welche sie aufgestellt worden ist, zu Widersprüchen führt.

Indessen erhält der Sachverhalt sofort eine andere Färbung, wenn man die Riemannschen Angaben durch die ausdrückliche Bedingung ergänzt, dass die mit einem Krümmungmaass von irgend welchem positiven oder negativen Wert behafteten Mannigfaltigkeiten nicht als selbständige Raumformen, sondern vielmehr als Raumgebilde innerhalb eines umfassenden Raumes von höherer Art anzusehen sind. Diese Bedingung ist von Riemann nicht ausgesprochen worden, ja die bereits auf S. 35 (und dann noch einmal auf S. 41) angeführten Sätze lassen kaum einen Zweifel, dass Riemann solche Einschränkung der Allgemeinheit seiner Auffassung selbst nicht gewollt hat. Jedenfalls ist die grosse Mehrzahl unter den Vertretern der neuen Theorie weit davon entfernt, an solche Einschränkung auch nur zu denken, sie sprechen von Räumen mit constantem, negativem oder positivem Krümmungmaass, als ob die selbständige Existenz solcher Räume gar keiner Untersuchung auf ihre Möglichkeit bedürfte.

Und doch liegt nicht nur, wie aus den bisherigen Erörterungen hervorgeht, die Sache so, dass die Riemannsche Theorie überhaupt irgendwie modificirt werden muss, wenn offenbar widerspruchsvolle

Folgerungen vermieden werden sollen, es liegt auch gerade die eben angedeutete Einschränkung noch ganz besonders nahe, da ja durch sie weiter nichts bewirkt wird, als dass man auch in diesem Betracht den bei den Flächen thatsächlich herrschenden Zustand auf die Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen überträgt. Denn das muss, wie gesagt, immer festgehalten werden, der ganze Begriff des Krümmungsmaasses rührt ja von der Betrachtung der Flächen, beziehungsweise der Linien her.

Wie nun innerhalb des dreidimensionalen euklidischen Raumes, der — um mit Riemann zu reden — in jedem seiner Punkte das Krümmungsmaass *Null* besitzt, unzählige einfach und zweifach ausgedehnte Gebilde mit einem von *Null* verschiedenen Krümmungsmaasse existiren, so würde man in jeder Mannigfaltigkeit von mehr als n Dimensionen, die, wie der euklidische Raum das Krümmungsmaass *Null* besitzt, Gebilde von geringerer Ausdehnungszahl annehmen können, deren Krümmungsmaass ein anderes ist. Wohlgemerkt hat die Annahme eines mehr als dreifach ausgedehnten Raumes hier nur eine rein hypothetische Bedeutung, ob sie überhaupt berechtigt ist, wird weiterhin im Verlaufe dieser Erörterungen selbst untersucht werden; hier wird weiter nichts behauptet, als dass, wenn ein solcher Raum überhaupt existirt, die Übertragung der mit dem Krümmungsmaass zusammenhängenden Vorstellungen von unserem dreidimensionalen Raum auf solchen Raum gerade in der oben angegebenen Weise erfolgen müsste.

In der That würde ja innerhalb eines n fach ausgedehnten Raumes ein Gebilde von $n-1$ Dimensionen durch *eine*, eines von $n-k$ Dimensionen durch k Gleichungen zwischen den n innerhalb solchen Raumes auftretenden Coordinaten seine Bestimmung finden. Durch solche die einzelnen Punktcoordinaten der völlig freien Veränderlichkeit entkleidenden Gleichungen würde dann die volle Gleichwertigkeit entweder der Punkte des Raumes oder der von jedem Punkte aus möglichen Richtungen, vielleicht auch die Gleichwertigkeit in beiden Beziehungen eine derartige Einschränkung erfahren, dass in der That das Linienelement, wie das Krümmungsmaass einen von Stelle zu Stelle wechselnden Wert erhalten könnte, wie dies ja das Beispiel der zweidimensionalen Gebilde innerhalb des dreidimensionalen Raumes deutlich zeigt. Dafür würde denn aber als Aequivalent nach der anderen Seite die zur Inte-

gration der aufgestellten Differentialausdrücke erforderliche Bestimmtheit gewonnen werden, die — wie oben (S. 47) bemerkt worden ist — den ohne solche Beziehung auf ausserhalb des Linienelements bestehende Verhältnisse aufgestellten Differentialgleichungen von vornherein fehlt.

Es ist nun sehr bemerkenswert, dass die eben besprochene, wahrscheinlicher Weise von Riemann selbst, jedenfalls von der grossen Mehrzahl seiner Nachfolger ausser Acht gelassene Konsequenz von *Beltrami* thatsächlich gezogen worden ist, dass in Wahrheit Beltrami seine Räume von constanter (negativer) Krümmung nur als Elemente umfassenderer Räume von höherem Range angesehen wissen will.

Schon einige gelegentliche Bemerkungen lassen hierüber keinen Zweifel. Zu diesen gehört eine am Schlusse der ersten Abhandlung⁴⁹⁾ gemachte Äusserung, dass die in dieser Abhandlung besprochene Oberfläche gleichzeitig im euklidischen und im nicht-euklidischen Raume existire, was doch nur möglich sein würde, wenn beide Räume Bestandteile eines höheren Raumes in derselben Weise sind, wie innerhalb des gewöhnlichen Raumes zwei Flächen von verschiedenem Krümmungsmaass eine Linie gemeinsam haben können.

Ferner kommt hier in Betracht die Angabe, dass die nicht-euklidische Grenzfläche mit der euklidischen Ebene zur Deckung gebracht werden könne.⁵⁰⁾ Diese Angabe hätte ja, wenn die Existenz des nichteuklidischen Raumes die des euklidischen ausschliesse, gar keinen Sinn, während sie ganz natürlich erscheint, wenn innerhalb eines vierdimensionalen Raumes neben dem euklidischen Raume noch die ganze Reihe der pseudosphärischen im Krümmungsmaass von dem Werte *Null* bis zu dem Werte ∞ variirenden Räume so existirt, wie Beltrami selbst an einer Stelle seiner zweiten Abhandlung es andeutet⁵¹⁾. An dieser Stelle nennt er nämlich die Krümmung der einzelnen denkbaren pseudosphärischen Räume ihren *Parameter*. Ferner ist hier auf den Schluss des zweiten Beltramischen Aufsatzes hinzuweisen, wo auseinandergesetzt wird, dass der $(n-1)$ fach ausgedehnte Raum von constanter positiver Krümmung im n dimensionalen Raum von constanter negativer Krümmung enthalten sei⁵²⁾. Denn diese Argumentation stellt sich formell wie sachlich lediglich als eine Erweiterung der Thatsache

dar, dass man auf einer durchweg gleichmässig negativ gekrümmten Fläche auch Kreise, beziehungsweise geschlossene, überall nach aussen convexe Linien ziehen kann.

Zur Evidenz gelangt aber die Behauptung, dass die Beltrami'sche Deduction an die Voraussetzung eines in einem höheren Raume enthaltenen Raumgebildes geknüpft ist, durch die Betrachtung des Ausdrucks für das Linienelement, von welchem er überhaupt ausgeht⁵³⁾. Denn dieser Ausdruck, nach welchem das Linienelement des n dimensionalen Raumes den Wert hat

$$(27) \dots ds = R \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x},$$

wenn $x^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = a^2$ ist, dieser Ausdruck zeigt vermöge der Verwendung von $n+1$ durch eine Gleichung verbundenen Coordinaten ja ganz deutlich, dass Beltrami den Raum von n Ausdehnungen als ein Gebilde innerhalb des Raumes von $n+1$ Ausdehnungen betrachtet wissen will. Dabei ist es bemerkenswert, dass auch die Elementarbestandteile dieses Raumes keineswegs nach allen Richtungen gleichmässig gestaltet sind, denn durch die Einführung von n unter sich unabhängigen Coordinaten vermöge einer besonderen Transformation⁵⁴⁾ wird für das Linienelement ein zwischen n völlig willkürlichen Variablen bestehender Ausdruck ganz derselben Form, wie sie unter No. (27) so eben angegeben worden ist, erhalten, d. h. ein Ausdruck, in welchem eine der Variablen eine wesentlich andere Rolle spielt, als alle übrigen. Diesem Sachverhalt entspricht auch das von Beltrami gelegentlich besprochene (auf S. 41 erwähnte) Coordinatensystem, bei welchem alle Coordinatenrichtungen bis auf eine innerhalb der sogenannten Grenzfläche (oder deren mehrdimensionalem Analogon) verlaufen, die eine davon ausgenommene aber durch die Normale zur Grenzfläche repräsentirt wird.

Zu dem gleichen Resultat, wie die Betrachtung der analytischen Deductionen von Riemann und Beltrami führt aber auch die Prüfung der *rein geometrischen* Behandlung, welche die nichteuklidische Geometrie von Seiten der beiden Bolyai und Lobatschewskys erfahren hat.

Dass die nichteuklidische Geometrie, auch ganz abgesehen von den sich an sie knüpfenden analytischen Transformationen,

ohne Hinzunahme einer vierten Dimension undenkbar ist, könnte man vielleicht schon aus einem der Bedenken deduciren, die im ersten Abschnitte dieser Schrift zum Ausdruck gebracht worden sind. Dort wurde auf (S. 12) die Consequenz der nichteuklidischen Geometrie an's Licht gezogen, nach welcher zwei Ebenen eventuell nur einen („den unendlich fernen“) Punkt gemeinsam haben würden. Dieser Sachverhalt, so undenkbar er im dreifach ausgedehnten Raume erscheint, würde im vierdimensionalen Raume alles Befremdende verlieren. Indessen kann man für die Notwendigkeit der Annahme einer vierten Dimension von Seiten der Vertreter der nichteuklidischen Geometrie noch weitere Gründe anführen. Einer derselben gründet sich auf das Verhalten der Flächen constanten Abstandes von einer Ebene.

Errichtet man auf einer Ebene Lote von der gleichen Länge l , so ist der geometrische Ort der Endpunkte dieser Lote, der in der euklidischen Geometrie bekanntlich eine Ebene ist, nach Bolyai und Lobatschewsky eine krumme, in allen Teilen gleichartig gestaltete und deswegen auch mit constantem Krümmungsmaass behaftete Fläche, das Maass ihrer Krümmung ist nach Bolyais Theorie

$$\frac{1}{k} \operatorname{tg} \frac{l}{k}.$$

Alle Ebenen, die auf der Grundebene senkrecht stehen, schneiden nun die gedachte Fläche in Linien, die unter einander congruent sind und innerhalb dieser Fläche offenbar die Rolle der Geraden in der Ebene spielen müssen. Die Längen zweier auf solchen Linien abgeschnittenen Strecken haben dabei notwendig dasselbe Verhältniss, wie die Längen ihrer senkrechten Projectionen auf die Grundebene, während die von jenen Strecken gebildeten Winkel den Winkeln zwischen ihren Projectionen direct gleich sind.

Bildet man auf der gedachten Fläche irgend ein Dreieck, dessen Seiten Strecken der eben gedachten Linien sind, nennt die Längen dieser Seiten a, b, c , die ihrer Projectionen auf die Grundebene u, v, w und die sowohl in dem von a, b, c gebildeten, als in dem von u, v, w gebildeten Dreieck auftretenden Winkel α, β, γ , so hat man die Gleichung

$$(28) \dots \sin \frac{u}{k} : \sin \frac{v}{k} : \sin \frac{w}{k} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Bezeichnet man ferner den constanten Wert der Verhältnisse $\frac{a}{u}, \frac{b}{v}, \frac{c}{w}$, der übrigens nach der nichteuklidischen Theorie die Grösse $\cos \frac{l}{k}$ besitzt, mit $\frac{k_1}{k}$, so ergibt sich für das angenommene Dreieck auf der Fläche gleichen Abstandes die Gleichung:

$$(29) \dots \sin \frac{a}{k_1} : \sin \frac{b}{k_1} : \sin \frac{c}{k_1} = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

also eine Gleichung von ganz derselben Form, wie die Gleichung (28), von dieser nur dadurch unterschieden, dass an Stelle von k die Grösse k_1 auftritt, d. h. mit anderen Worten eine Gleichung, die Geltung haben würde auf einer Ebene innerhalb eines nicht-euklidischen Raumes vom Parameter k_1 . In diese Ebene müsste sich die gedachte Fläche umbiegen lassen, da die inneren Maassverhältnisse dabei nicht geändert würden.

Dass bei solcher Umbiegung noch recht sonderbare Verhältnisse sich geltend machen würden, soll hier nur kurz erwähnt werden. Einmal nämlich muss man dann das Prinzip, nach welchem zwei durch Verbiegung zur Deckung zu bringende Flächen gleiches Krümmungsmaass haben müssten, ausser Kraft setzen, obwohl dieses durch die Betrachtung von lauter unendlich kleinen Linien-elementen hergeleitete Prinzip offenbar eine auch in der nicht-euklidischen Geometrie vollkommen uneingeschränkte Gültigkeit beanspruchen kann. Zweitens gibt der Umstand zu denken, dass — wie sich leicht zeigen lässt — die innerhalb der oben gedachten Fläche in Gemässheit der Lobatschewskyschen Angaben zu construierende Grenzcurve der Grenzlinie in der Grundebene völlig congruent ausfallen würde, ohne dass dabei irgendwie ersichtlich ist, wie sie die abweichende Gestalt, die ihr innerhalb des zum Parameter k_1 gehörenden Raumes notwendig zukommen müsste, durch die senkrecht zu jener Fläche vorzunehmende Verbiegung erlangen könnte. Es sind dies neue Bedenken, die vielleicht bei näherer Verfolgung an sich ausreichen würden, der nichteuklidischen Theorie unlösbare Widersprüche nachzuweisen.

Hier sollen diese Bedenken indessen weiter nicht discutirt, sondern constatirt werden, dass in dem Raum vom Parameter k auch der Raum vom Parameter k_1 , und, da in dem Werte von $k_1 = k \cos \frac{l}{k}$ die völlig beliebige Grösse l vorkommt, überhaupt alle

irgend denkbaren nichteuklidischen Räume ihre Spuren zeigen, was alles nur einen Sinn hat, wenn diese Räume sich in ihrer Existenz nicht gegenseitig ausschliessen, sondern gleichzeitig innerhalb einer höheren Einheit existiren.

Man braucht aber gar nicht einmal auf die Einzelheiten der Bolyai-Lobatschewskyschen Geometrie einzugehen, um sich zu überzeugen, dass dieselbe für einen völlig selbständig existirenden Raum unmöglich ist. Schon oben im Eingang des ersten Abschnitts der vorliegenden Schrift (S. 6) ist darauf hingewiesen, dass die Kernfrage, nämlich die nach der Geradheit der in der nichteuklidischen Geometrie für *möglicherweise gerade* erklärten Linien aus der Theorie selbst heraus nicht entschieden werden kann, in der That macht ja die Lehre der nichteuklidischen Geometrie die Entscheidung dieser Frage von der erfahrungsmässigen Feststellung des Wertes der Raumconstante k abhängig. Nun kommt in den Formeln doch gerade das zum Ausdruck, was den einzelnen von einander unterschiedenen Räumen eigentümlich ist, die innere Natur des jedesmal ins Auge gefassten Raumes hängt an dem demselben zukommenden Werte von k .

Demnach ist in der inneren Natur des jeweilig betrachteten nichteuklidischen Raumes kein Moment enthalten, welches über die Geradheit der in diesem Raume auftretenden Linien Aufschluss giebt, diese Geradheit muss mithin durch das Sachverhältnis bestimmt werden, welches unabhängig von den inneren Beziehungen des betrachteten Raumes sich geltend macht, durch eine Eigenschaft, die dieser Raum als Ganzes besitzt. Solche Eigenschaft kann man ihm natürlich nur beilegen in Bezug auf etwas ausserhalb von ihm Existirendes, man ist gezwungen seine Beschaffenheit im Ganzen als das Ergebnis einer zwar seine inneren Maassverhältnisse nicht ändernden, wohl aber die Gestalt der in ihm vorhandenen Raumgebilde wesentlich beeinflussenden Operation anzusehen, die man füglich *Verbiegung* nennen kann. Mit anderen Worten, es kann ihm keine selbständige, sondern nur eine von aussen her beeinflusste Existenz innerhalb einer höheren Einheit zukommen.

Wohlzumerken, dieser Zwang besteht nur für den nichteuklidischen Raum, der vermöge der unendlichen Zahl von Werten, die die für ihn charakteristische Constante k haben kann, eben

der inneren Bestimmtheit ermangelt. Für die euklidische Geometrie, in welcher nichts willkürlich und unbestimmt ist, ist die ganze eben angestellte Betrachtung vollkommen gegenstandslos.

Vielleicht ist eine gewisse, wenn auch unbewusste Empfindung für die im Vorstehenden dargelegten Consequenzen dazu mitwirkend gewesen, dass die modernen Raumtheorien auch in der Dimensionszahl fortwährend von der uns geläufigen Vorstellung absehen und ihre Deductionen von vornherein auf den n dimensionalen Raum einrichten. Den grösseren Anteil an diesem Verfahren hat allerdings wohl die oben bei Besprechung der Riemannschen Arbeit (auf S. 52) bereits gekennzeichnete Neigung zu rein theoretischer Verallgemeinerung.

Immerhin ist es bemerkenswert, dass nicht alle Anhänger der nichteuklidischen Lehre diese Consequenz ziehen, es giebt unter ihnen auch solche, die zwar mit Gauss die Beweisbarkeit des euklidischen Parallelenaxioms leugnen und die Frage, in wie weit demselben thatsächlich Gültigkeit zukomme, von der Erfahrung abhängig machen wollen, dagegen aber die Annahme eines mehr als dreifach ausgedehnten Raumes für eine jeder möglichen Realität entbehrende einfache Fiction erklären.⁵⁵⁾

Begreiflich genug ist die Abneigung gegen die Annahme von mehr als dreifach ausgedehnten Räumen, schon aus der Erwägung heraus, dass dann für die Dimensionszahl des Raumes gar keine Einschränkung mehr abzusehen ist, der Raum von vier Dimensionen ist um kein Haar begreiflicher als der von tausendfacher Ausdehnung. Nichtsdestoweniger muss auf Grund der so eben dargelegten Umstände diese Abneigung bei gleichzeitiger Anerkennung der Bolyaischen Theorie als eine Inconsequenz bezeichnet werden.

Und aus dieser inneren Verwandtschaft der Lehre vom vielfach ausgedehnten Raume mit der nichteuklidischen Geometrie erwächst denn ein neues Moment zur Beurteilung der Frage nach der Richtigkeit dieser Geometrie. Wenn sich herausstellen sollte, dass die Annahme eines Raumes von mehr als drei Dimensionen an sich auf Widersprüche führt, so würde dadurch auch zugleich die nichteuklidische Raumanschauung von einem anderen neuen Gesichtspunkte aus widerlegt sein.

Die innere Verwandtschaft dieser Anschauung mit jener Annahme zeigt sich auch schon in der Ähnlichkeit der Argumentationen, auf die beide sich stützen, auf der einen, wie auf der anderen Seite wird die angebliche Widerspruchsfreiheit ins Feld geführt.

Gegen die Möglichkeit eines Raumes von mehr als drei Dimensionen, so heisst es, gibt es keinen durchschlagenden Beweis, also muss man dieselbe zulassen und mit ihr rechnen. Allerdings habe man ja von solchem Raume keine Vorstellung, indessen beweise dieser Umstand nichts gegen seine Existenz, es sei dies lediglich als ein Symptom der Unvollkommenheit unseres Geistes anzusehen, dem eine über die uns geläufige Raumform hinausgehende Vorstellung versagt sei. Es seien ja auch Wesen denkbar, die in analoger Weise nur von einem zweidimensionalen Raume eine Vorstellung besässen, diese würden natürlich die Existenz eines Raumes von dreifacher Ausdehnung für ein leeres Hirn-espinst erachten, während dieser für sie unvorstellbare Raum doch thatsächlich existire, ganz ähnlich stehe es mit uns gegenüber der vierten Raumdimension oder etwaigen weiteren Dimensionen.

Diese Auffassung ist, wie erzählt wird, bereits von Gauss gehegt worden, der Leute, die sie nicht gelten lassen wollten, als Böötier zu bezeichnen pflegte, nach einigen Anzeichen zu urteilen, scheint sie auch Riemann, sowie einer Reihe anderer Gelehrter nicht fremd geblieben zu sein⁵⁶⁾, von der Ausnutzung zu geschweigen, die sie seitens der Vertreter des sogenannten Spiritismus gefunden hat.

Eine besonders deutliche Auseinandersetzung der Einzelheiten dieser Auffassung findet sich in der bereits besprochenen zweiten Abhandlung von Helmholtz, daselbst wird die Möglichkeit von Wesen, die in ihrer ganzen Existenz auf ein zweidimensionales Raumgebiet beschränkt sind, eingehend erörtert.⁵⁷⁾ Helmholtz sagt u. a. wörtlich:

„Wir nehmen an, dass solche Wesen nicht die Fähigkeit haben, „irgend etwas ausserhalb dieser Oberfläche wahrzunehmen, „wohl aber Wahrnehmungen, ähnlich den unserigen, innerhalb „der Ausdehnung der Fläche, in der sie sich bewegen, zu „machen. Wenn sich solche Wesen ihre Geometrie ausbilden, „so würden sie ihrem Raume natürlich nur zwei Dimensionen „zuschreiben. Sie würden ermitteln, dass ein Punkt, der sich „bewegt, eine Linie beschreibt, und eine Linie, die sich be- „wegt, eine Fläche, was für sie das vollständigste Raumge-

„bilde wäre, was sie kennen. Aber sie würden sich ebenso-
„wenig von einem weiteren räumlichen Gebilde, was entstände,
„wenn eine Fläche sich aus ihrem flächenhaften Raume heraus-
„bewegte, eine Vorstellung machen können, als wir es können
„von einem Gebilde, das durch Herausbewegen eines Körpers
„aus dem uns bekannten Raume entstände. Unter dem viel ge-
„missbrauchten Ausdrucke „sich vorstellen“ oder „sich denken
„können, wie etwas geschieht“ verstehe ich — und ich sehe
„nicht, wie man etwas Anderes darunter verstehen könne,
„ohne den ganzen Sinn des Ausdrucks aufzugeben —, dass
„man sich die Reihe der sinnlichen Eindrücke ausmalen könne,
„die man haben würde, wenn so etwas in einem einzelnen Falle
„vor sich ginge. Ist nun gar kein sinnlicher Eindruck bekannt,
„der sich auf einen solchen nie beobachteten Vorgang bezöge,
„wie für uns eine Bewegung nach einer vierten, für jene Flächen-
„wesen eine Bewegung nach der uns bekannten dritten Di-
„mension des Raumes wäre, so ist ein solches „Vorstellen“
„nicht möglich, ebensowenig als ein von Jugend aus auf ab-
„solut Blinder sich wird die Farben „vorstellen“ können, wenn
„man ihm auch eine begriffliche Beschreibung derselben geben
„könnte.“

Die ganze Argumentation erweist sich aber sofort als un-
stichhaltig, wenn man erwägt, dass die Meinung, durch das Ge-
bundensein an eine Fläche würde die Kenntniss der dritten Raum-
dimension ausgeschlossen, überhaupt eine leere Fiction ist. Die
Definition des Wortes „Vorstellen“, die Helmholtz zur Stützung
seiner Theorie heranzieht, läuft, wenigstens in der nachher davon
gemachten Anwendung, auf eine unberechtigte Einengung dieses
Begriffes hinaus. Wenn sich auch die von ihm fingierten Wesen
von der ihnen als Aufenthalt angewiesenen Fläche nicht entfernen
können, so würden sie doch allen aus der dritten Dimension an
sie herantretenden Einwirkungen unterliegen müssen, da sie ja
gegen diese dritte Dimension thatsächlich nicht abgeschlossen sind.
Warum dieselben sich von einer Bewegung in diesen benachbarten
Raum keine Vorstellung machen könnten, ist auch nicht einzusehen.
Ebensogut könnte man sagen, dass Jemand, der niemals einen
Luftballon thatsächlich bestiegen hat, sich von einer Luftreise keine
Vorstellung machen könnte. Thatsächlich hat davon doch ein Jeder
irgend welche — vielleicht der Wirklichkeit sehr wenig ent-

sprechende, aber für ihn lebendige — Vorstellung, weil er eben überhaupt den Begriff der Bewegung kennt, der ihn befähigt, sich auch von solcher Fahrt ein Bild zu machen, eine Reihe von sinnlichen Eindrücken, die dabei zu erwarten sind, auszumalen. So wird auch ein an eine Fläche gebundenes Wesen den auf dieser Fläche für ihn lebendig gewordenen Begriff der Bewegung ohne Weiteres in Gedanken auf die ihm zwar für seine eigene Bewegung thatsächlich verschlossene, im Übrigen aber fortwährend in seine Sinneswahrnehmungen hineingreifende dritte Dimension übertragen.

Denn der einleitende Satz der oben angeführten Helmholtzschen Erörterung: „Wir nehmen an, dass ein solches Wesen nicht die Fähigkeit besitzt, etwas ausserhalb der ihm als Wohnplatz dienenden Fläche wahrzunehmen“, dieser Satz enthält, wie wiederholt betont werden muss, eine völlig willkürliche, ohne die leiseste Spur einer Begründung gemachte Annahme. Allerdings sagt Helmholtz an einer anderen Stelle seiner Abhandlung:⁵⁸⁾ „Anschauungen, die man hat, sich wegdenken, ist leicht,“ aber diese Behauptung entbehrt nicht nur der ihr von Helmholtz anscheinend zugeschriebenen Selbstverständlichkeit, sie ist vielmehr in dem hier von ihr gemachten Gebrauche einfach nicht richtig.

Es ist direct unmöglich, aus der räumlichen Anschauung auch nur eine Dimension hinwegzudenken, ohne aus dem Bereiche des Anschaulichen herauszugehen. Wir sprechen ja in der Geometrie von Linien und Flächen, aber kein Mensch ist im Stande, sich ein selbständiges Gebilde dieser Art vorzustellen, sie sind für Niemanden etwas anderes, als Accidentien der allein eine reale Existenz besitzenden dreidimensionalen Körper.

Und das führt dazu, der Gauss-Helmholtzschen Betrachtung noch eine neue Seite abzugewinnen. Offenbar müssten doch die in die Fläche gebannten Wesen, auf die sich jene Betrachtung bezieht, selbst zweidimensionaler Art sein, weil sie sonst an ihrem eigenen Leibe die ihnen verpönte Kenntniss der dritten Dimension gewinnen würden. Dies nimmt auch Helmholtz ausdrücklich an, er nennt⁵⁹⁾ sie „verstandbegabte Wesen von zwei Dimensionen.“ Nun aber ist uns eine Vorstellung von Wesen dieser Beschaffenheit vollständig unmöglich, jedenfalls fehlt uns innerhalb unseres dreidimensionalen Raumes jede dahin gehende Erfahrung.

Da möchte ich den Spiess direct umkehren und sagen: Nach unserer Erfahrung haben wir keinesfalls Ursache, einen Zustand

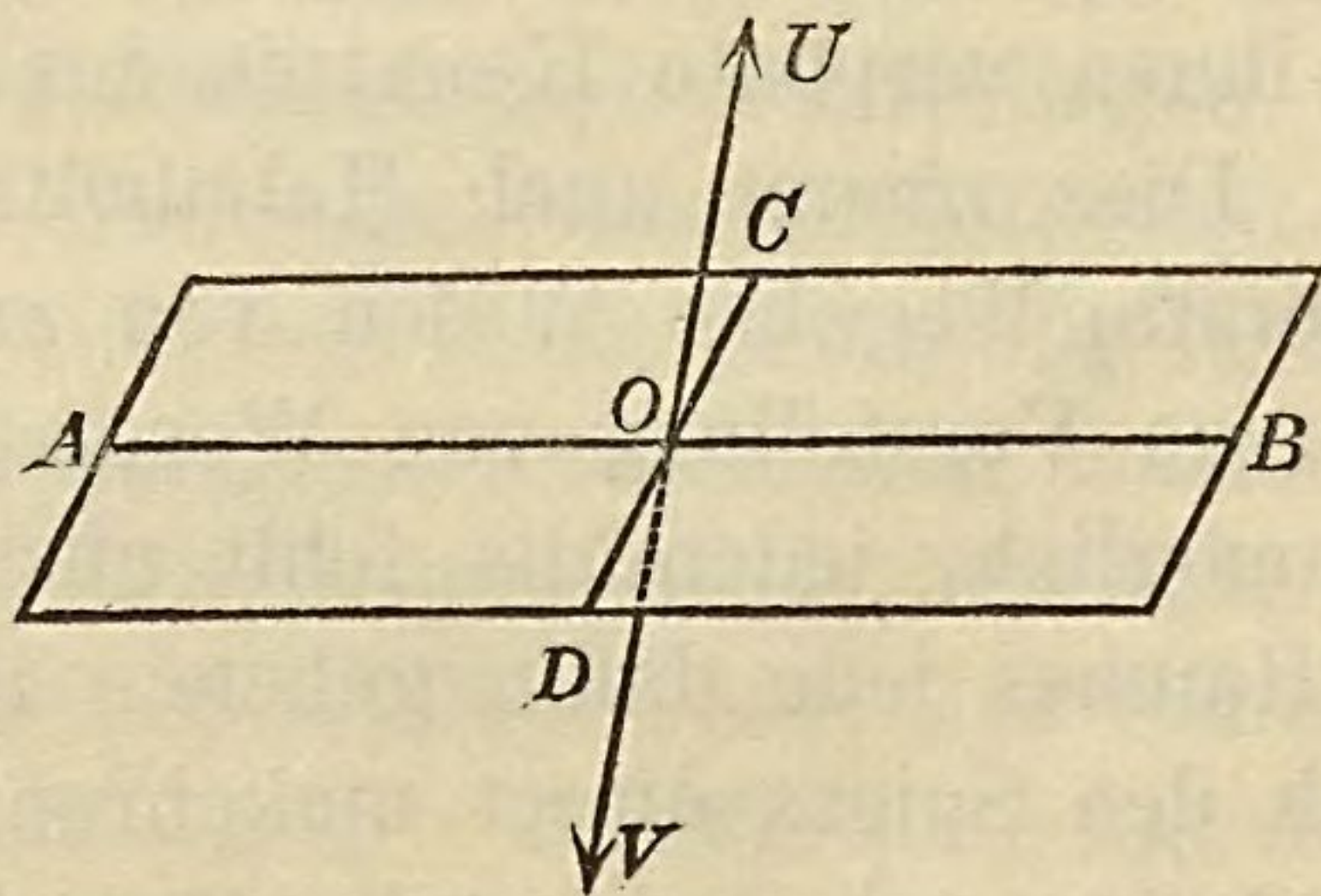
für möglich zu halten, bei dem innerhalb einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit Wesen selbständig bestehen könnten, deren Ausdehnung eine geringere Zahl von Abmessungen zeigt, als sie dem Raume selber eigentümlich ist, denn wenn dies überhaupt möglich wäre, so müssten innerhalb des uns vertrauten dreidimensionalen Raumes selbständig existirende zweifach ausgedehnte Wesen zu finden sein, was thatsächlich nicht der Fall ist.

Umgekehrt ist dann die Existenz eines Raumes im höchsten Grade unwahrscheinlich, dessen Dimensionszahl über die der thatsächlich nach unserer Erfahrung selbständig existirenden Gebilde hinausgeht. Diese Gebilde weisen aber samt und sonders eine dreifache Ausdehnung auf, damit wäre denn der vierten Dimension die Thür vor der Nase zugeschlossen.

Diese Deduction, die sich vollständig auf den Boden der für die Plausibilität der vierten Dimension vorgebrachten Gründe stellt, um diese Gründe in Waffen gegen die Lehre von dieser Dimension zu verwandeln, dürfte an sich wohl geeignet sein, den Glauben an die Möglichkeit dieser Lehre stark zu erschüttern.

Ich will mich aber hiemit nicht begnügen, sondern — vorbehaltlich der bis auf die Wurzeln unserer ganzen Raumanschauung zurückgehenden tieferen Erörterung, welche im letzten Abschnitte dieser Schrift ihren Platz finden wird — schon an dieser Stelle durch ein ganz scharfes Argument nachweisen, dass ein Raum von mehr als drei Dimensionen ein Ding der Unmöglichkeit ist. Bei dieser Beweisführung wird, wie ich ausdrücklich hervorhebe, von der Frage, ob die innere Structur des Raumes der euklidischen Geometrie entspricht oder nicht, völlig abgesehen, es kommen nur Annahmen und Constructionen in's Spiel, die in der nicht-euklidischen Geometrie ebenso gültig sind, wie in der euklidischen.

Fig. 8.



Man denke sich im Raume irgend eine Ebene, die von einer Geraden UV unter irgend welchem Winkel im Punkte O geschnitten wird, dann ziehe man in der Ebene die Gerade AB senkrecht zu UV und ebenfalls in der Ebene die Gerade CD senkrecht zu AB . Erteilt man nun der Ebene samt der mit ihr festverbundenen Geraden UV die Hälfte einer vollen Drehung in der Art, dass die Gerade AB ihre Lage bei dieser Drehung beibehält, so fällt die in Betracht gezogene Ebene in der Weise mit sich selbst zusammen, dass die durch AB getrennten Hälften derselben — insbesondere auch die beiden Hälften der Linie CD , CO und DO — ihre Rollen vertauschen, während ausserdem UO mit VO wechselt.

Für die beiden Hälften der Linie UV stellt sich demnach die Ebene in wesentlich verschiedener Situation dar. Denkt man sich eine Gerade innerhalb der Ebene um den Punkt O sich drehend, so hat diese Drehung einen zweifach verschiedenen Sinn, je nachdem man sie zu der Linienhälfte OU oder zu der Linienhälfte OV in Beziehung setzt. Denn dreht sich die gedachte Gerade um O etwa in dem Sinne, dass sie, um von OA nach OB überzugehen, den Weg über OC wählt, so verwandelt sich diese Drehung, sobald man OU mit OV vertauscht, weil dann auch OC mit OD wechselt, während AB ungeändert bleibt, in eine Drehung von OA über OD nach OB . Das heisst eben: die Drehung der eben gedachten Geraden hat zu OU eine Beziehung, die das directe Gegenteil ihrer Beziehung zu OV ist.

Diese ganze Betrachtung ist von dem Winkel, unter dem UV sich gegen die Ebene $ABCD$ neigt, völlig unabhängig, sie gilt für alle sonst den oben aufgestellten Angaben entsprechenden Geraden, die demnach sämtlich in zwei durch die Ebene getrennte Hälften zerfallen derart, dass für die eine Hälfte aller dieser Geraden der Drehungssinn einer in der Ebene um den Punkt O sich drehenden Geraden das Gegenteil von dem Sinn ist, den solche Drehung für die andere Hälfte besitzt.

Auch ist wohl zu bemerken, dass alle die eben erörterten Verhältnisse ganz unabhängig davon bestehen, ob neben den drei durch die Ebene und die sie schneidende Gerade bedingten Raumausdehnungen noch eine vierte Dimension existirt oder nicht.

Aber ein bedeutsamer Unterschied zwischen dem Fall des dreifach und dem des mehrfach ausgedehnten Raumes tritt ein, sobald man die Linie UV ohne Beteiligung der Ebene an ihrer

Bewegung sich derart um den Punkt O drehen lässt, dass die Hälften OU und OV ihre Rollen vertauschen.

Bei solcher Drehung beschreibt die Gerade UV notwendig eine Fläche, im dreifach ausgedehnten Raume muss diese Fläche die Ebene $ABCD$ schneiden, während im Raume von grösserer Dimensionszahl eine solche Notwendigkeit nicht besteht.

Hierin liegt nun gerade das entscheidende Moment. Denn da die beiden Hälften der Linie UV , wie oben gezeigt, in ihrem Verhalten zur Ebene $ABCD$ einen ganz bestimmt ausgeprägten Gegensatz aufweisen, welcher auch für die Hälften aller anderen die Ebene im Punkte O schneidenden Geraden besteht, so geht die Gerade UV bei der ihr angesonnenen Drehung an einer Stelle aus dem Geltungsbereich eines gewissen Zustandes in das gerade entgegengesetzten Zustandes über; die Logik verlangt, dass die Stelle ganz unzweideutig erkennbar sei, wo dieser Wechsel stattfindet, oder, wenn man lieber will, dass innerhalb der Drehung eine Stelle vorhanden sei, die durch ihre Beschaffenheit für diesen Wechsel den „zureichenden Grund“ liefert.

Dieser logischen Forderung genügt vollkommen der dreidimensionale Raum, in welchem der gedachte Wechsel offenbar dann eintritt, wenn die Gerade UV durch die Ebene $ABCD$ hindurchgeht, was am einfachsten durch das Beschreiben der zu AB senkrechten, die gegebene Ebene in CD schneidenden Ebene bewirkt wird. Denn dann geht der auf der einen Seite der Ebene $ABCD$ herrschende Zustand ganz von selbst in den auf der anderen Seite herrschenden gegenteiligen Zustand über.

Im Raume von mehr als drei Ausdehnungen würde der Übergang von OU in OV unter Benutzung der vierten Dimension erfolgen können, so dass die sich drehende Gerade UV bei diesem Übergange die Ebene $ABCD$ *nicht* zu schneiden brauchte. Da nun keine der bei solcher Bewegung passirten Lagen zur Ebene $ABCD$ eine besonders ausgezeichnete Beziehung haben würde, so hätte man die Sachlage, dass ein Zustand sich in sein Gegenteil verwandelte, ohne dass von den verschiedenen zwischen der Anfangs- und der Endlage denkbaren Zwischenlagen irgend eine als die bezeichnet werden könnte, bei der ein angebbarer Anlass zu diesem Wechsel vorläge. Dieser Zustand würde mit dem Satze vom zureichenden Grunde in offenbarem Widerspruch stehen und folglich von vornherein unmöglich sein.

Der Widerspruch verliert an seiner Bedeutung auch dadurch nichts, dass die solch übergangslosen Wechsel ermöglichende vierte Dimension ausserhalb unserer auf den dreidimensionalen Raum beschränkten Erfahrung liegen würde, dass also die ganze eben hypothetischer Weise erörterte Construction für uns thatsächlich unmöglich ist. Denn die Unvorstellbarkeit der vierten Dimension, die ja angeblich nur ein Ausfluss unserer geistigen Unzulänglichkeit ist, brauchte für höher veranlagte Wesen nicht zu existiren; wie hoch indessen deren geistiger Standpunkt auch taxirt werden mag, an die Forderungen der Logik, die bei der vorstehenden Betrachtung allein den Ausschlag gegeben haben, wären sie jedenfalls ebensogut gebunden, wie wir.

Das Ergebnis ist also dies, dass die Annahme eines nach mehr als drei Richtungen ausgedehnten Raumes als zu Widersprüchen führend verworfen werden muss, woraus sich nach den vorher in diesem Abschnitte erörterten Gesichtspunkten die Unzulässigkeit der nichteuklidischen Geometrie auch für den dreidimensionalen Raum ergibt.

Freilich entsteht da sofort die Frage, was denn aus allen den mit solchem Aufwand von Scharfsinn aufgestellten Sätzen wird, in denen die neueren Theorien für den dreifach, wie für den n fach ausgedehnten Raum ihre spezielle Ausgestaltung gefunden haben. Für die Räume von grösserer Dimensionszahl fällt selbstverständlich überhaupt jede Möglichkeit der geometrischen Deutung fort; soweit die aufgestellten Formelsysteme überhaupt einen Wert besitzen, kann derselbe nur als ein rein analytischer in Betracht kommen, wie dies ja auch von manchen Seiten schon jetzt anerkannt worden ist.

Anders steht es natürlich mit den innerhalb des dreidimensionalen Raumes interpretirbaren Formeln, für welche eine — natürlich gehörig eingeschränkte — Gültigkeit nicht von vornherein abgewiesen werden kann. Selbstverständlich ist diese Deutung nicht in der Art möglich, dass die Bolyaischen Geraden nun einfach als Curven in die euklidische Ebene eintreten, diese Situation schliesst sich durch den Umstand aus, dass jenen Linien durch die Eigenschaft der möglichen Geradlinigkeit oder, wenn man lieber will, durch den Charakter der kürzesten Ausdehnung einige (besonders in den Winkelbeziehungen zu Tage tretende)

Sondereigenschaften zugewachsen sind, die den durch die gleiche Formel, wie sie ausgedrückten euklidischen Curven nicht zukommen. Es genügt, an das auf Seite 15 gegebene Beispiel zu erinnern.

Für die nichteuklidische Planimetrie bleibt eben nur eine Interpretation von der Art übrig, wie sie Beltrami durch die Betrachtung der Flächen von constanter negativer Krümmung gegeben hat. Dort finden auch die der nichteuklidischen Geometrie eigentümlichen Liniengebilde (Grenzlinie, Linie constanten Abstandes von einer geodätischen Linie) ihre reelle, freilich auf die Eigenschaft der überall gleichmässigen Bildung im Allgemeinen verzichtende, Versinnlichung, während diese Gebilde innerhalb der Ebene in der Geraden, die ihnen entsprechenden Flächengebilde in der euklidischen Ebene aufgehen.

Der dreidimensionale euklidische Raum bietet aber auch die Möglichkeit der — natürlich ebenfalls in passender Weise zu modificirenden — Darstellung für die innerhalb eines zweifach ausgedehnten Gebietes sich haltenden Theorien der sphärischen und elliptischen Geometrie. Die Untersuchungen der hieher gehörenden Gebilde, auf denen gewisse den euklidischen Geraden in einigen Beziehungen verwandte Liniensysteme im Mittelpunkt der Discussion stehen, sind ohne Frage vom höchsten Interesse und vielfach von grosser Tragweite, dadurch verlieren sie indessen nichts an ihrem Character als *Betrachtungen von Flächen innerhalb des*, eben sehr bemerkenswerter Weise für alle solche Untersuchungen den Boden hergebenden, *euklidischen Raumes*. Keinesfalls können sie auf die Geltung selbständiger Raumtheorien Anspruch machen.

V.

Widerlegung der Möglichkeit, die geometrischen Axiome auf die Erfahrung zu basiren.

In den vorangehenden Abschnitten ist direct nachgewiesen worden, dass die nichteuklidische Geometrie sich mit den Prinzipien der Raumanschauung, welche von den Vertretern dieser Geometrie nicht weniger, wie von den Anhängern der euklidischen Lehre als allgemein verbindlich anerkannt werden, nicht verträgt. Es ist ferner gezeigt worden, dass die Stütze, welche die nichteuklidische Geometrie an den Theorien einiger hervorragender Autoritäten zu

finden glaubte, nur eingebildeten Wert hat, weil die Gültigkeit dieser Theorien, soweit sie überhaupt vorhanden ist, nur unter gewissen, die allgemeine Verwendung derselben ausschliessenden Voraussetzungen besteht. Endlich wurde darauf hingewiesen, dass die nichteuklidische Geometrie notwendig die Annahme einer vierten Raumdimension nach sich zieht, so dass durch den gleichzeitig geführten Nachweis der Unmöglichkeit dieser vierten Raumdimension noch ein weiteres Argument zu Gunsten der mit Unrecht angezweifelte altüberlieferten euklidischen Lehre gewonnen wurde.

Wenn schon diese Argumente völlig ausreichen, um die mit so vieler Prätension auftretenden, durch ein übereiltes Schwören auf die Worte zwar höchst bedeutender, darum aber nicht unfehlbarer Meister zu unverdientem Ansehen gelangten modernen Raumtheorien als unrichtig zu erweisen, so leiden sie doch an dem Mangel, dass sie auf eine wesentlich negative, an den Folgen, beziehungsweise den Begründungen dieser Theorien geübte Kritik hinauslaufen. Eine wirkliche Einsicht in das Wesen der Raumanschauung kann natürlich nicht durch eine an den Einzelfolgerungen haftende, wenn auch formell noch so beweiskräftige Widerlegung des falschen, vielmehr nur durch einen auf philosophischer Grundlage sich erhebenden positiven Aufbau des richtigen geometrischen Systems gewonnen werden.

Ein solcher Aufbau, wie er im folgenden und letzten Abschnitt dieser Schrift gegeben werden soll, ist um so unabweislicher, als er bei Herstellung seiner Grundlagen Anlass bietet, auf den Grundirrtum einzugehen, von dem die sämtlichen modernen Theorien ihren Ausgang nehmen, nämlich auf die Behauptung, dass es nicht möglich sei, das geometrische System ohne Zuhülfenahme gewisser allein durch die Erfahrung festzustellender Elemente zu Stande zu bringen.

Dies ist in der That der eigentliche Kern, der weitaus wichtigste Punkt in der ganzen hier behandelten Frage, eine Erörterung, die an ihm vorbeiginge, würde stets den Vorwurf verdienen, an der Oberfläche haften geblieben zu sein. Sie würde denselben Fehler begehen, der von der grossen Mehrzahl der mit dem Ausbau der nichteuklidischen Lehre beschäftigten Mathematiker fortwährend begangen wird, den nämlich, auf eine Prüfung der erkenntnistheoretischen Basis aller ihrer Deductionen von vornherein zu verzichten.

Zu welchen Denkfehlern die prüfungslose Annahme des Satzes von der Unentbehrlichkeit der Erfahrung für die Feststellung der geometrischen Axiome führt, zeigt sich besonders auffällig an der Idee, den thatsächlich herrschenden Wert der nichteuklidischen Raumconstante (k) durch Beobachtung an grossen Raumfiguren zu ermitteln. Man will dazu die Resultate der astronomischen „Messungen“ benutzen, ohne sich durch die doch nicht sehr fern liegende Erwägung stören zu lassen, dass die grossen zu Dreiecken zusammenzufügenden Linien samt den dadurch gebildeten Winkeln ja gar nicht durch directe „Messung“ bestimmt worden sind. Die wirklichen — übrigens natürlich auch mit der ganzen Unsicherheit unseres empirischen Messverfahrens behafteten — Messungen betreffen in Wahrheit ganz andere und zwar, was die Länge angeht, ungleich kleinere Grössen, aus denen dann die Elemente der eben gedachten kosmischen Figuren durch ein höchst verwickeltes, fortwährend auf die überlieferte Geometrie zurückgreifendes Verfahren ihre Bestimmung finden. Allerdings besitzen ja die Formeln der sphärischen Trigonometrie eine von der euklidischen Anschauung unabhängige Gültigkeit, aber die der ebenen Trigonometrie, die doch in vielen Stadien der Rechnung auftreten und gerade bei der Verwendung der an die wirkliche Längenmessung anknüpfenden Figuren die Hauptrolle spielen, würden je nach dem Werte der eventuell in ihnen benutzten nichteuklidischen Constante ganz verschiedene Ergebnisse liefern. Die Praxis der rechnenden Astronomie gebraucht sie selbstverständlicher Weise in der euklidischen Gestalt, wie hieraus aber eine Entscheidung über die Gültigkeit der in die Rechnung fortwährend eingehenden Voraussetzungen erwachsen soll, ist nicht abzusehen. Was bei solchem Drehen im Kreise herauskommt, zeigt ja deutlich das ganze in ähnlicher Art begründete System der nichteuklidischen Geometrie selber.

Als eigentliche Quelle der zu so bedenklichen Consequenzen führenden prüfungslosen Annahme des Satzes von der Unentbehrlichkeit der Erfahrung für die Herstellung des geometrischen Systems muss man wohl die Verkündigung dieses Satzes durch so grosse Autoritäten wie *Gauss*, *Riemann* und *Helmholtz* ansehen. Diese begnügen sich ja nun freilich nicht mit der blossen Behauptung des Satzes, sie führen für denselben auch verschiedene Gründe an, die im Nachstehenden beleuchtet werden sollen.

Der Standpunkt *Riemanns* ist aus der Einleitung zu seiner Abhandlung ersichtlich. Er sagt daselbst⁶⁰⁾:

„Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des „Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen „im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie gibt von ihnen „nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestim- „mungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältnis „dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht „weder ein, ob und inwieweit ihre Verbindung notwendig, „noch a priori ob sie möglich ist. — Diese Dunkelheit wurde „auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten „neueren Bearbeiter zu nennen, weder von den Mathematikern, „noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, „gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der „allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter „welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet „blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, „den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus all- „gemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus „hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse ver- „schiedener Maassverhältnisse fähig ist und der Raum also „nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse „bildet. Hiervon aber ist eine notwendige Folge, dass die „Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössen- „begriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigen- „schaften, durch welche sich der Raum von anderen denk- „baren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus „der Erfahrung entnommen werden können.“

Die Überschätzung der den Maassverhältnissen beiwohnenden Bedeutung, welche die vorstehende Riemannsche Darlegung characterisirt, hat ihre Würdigung bereits in den Ausführungen des dritten Abschnittes der vorliegenden Schrift gefunden, wo ausführlich nachgewiesen worden ist, dass Riemann bei seinen Schlussfolgerungen an dem Kernpunkt der Sache vorbeigegangen ist, obwohl er an gewissen anderen von ihm zwar angegebenen, aber keineswegs genügend ausgenutzten Prinzipien seiner Theorie einen ausreichenden Fingerzeig für die Einschlagung des richtigen Weges gehabt hätte. Bei Verfolgung dieses Weges würde er gesehen haben, dass dem Raum in der Begriffsbestimmung, auf die auch

er schliesslich hinauskommt, eine a priori vollkommen bestimmte Gestaltung beiwohnt, die jede Hinweisung auf die Erfahrung vollkommen ausschliesst.

Indessen stellen die Sätze des zweiten Absatzes der oben mitgeteilten Riemannschen Erörterung im Grunde wohl nur eine theoretische Einkleidung seiner wirklichen, bereits in dem ersten Absatz angedeuteten Auffassung dar, und diese selbst scheint sich im Wesentlichen mit der von *Helmholtz* zu decken, wenn dieser gegen das Ende seiner zweiten Abhandlung ausführt⁶¹), dass die Geometrie ihren Inhalt doch nur durch (im Kantschen Sinne) *synthetische* Sätze gewinnen könne, dass aber jede aprioristische Begründung der sogenannten Axiome, insofern man dabei ja nichts entwickeln könne, als was von vornherein in den Prämissen stecke, aus der Sphäre der (im Kantschen Sinne) *analytischen* Sätze nicht herauskomme. Eine wörtliche Wiedergabe der Helmholtzschen Sätze an dieser Stelle verbietet sich durch die den eigentlichen Sachverhalt nicht gerade aufklärende physikalische Einkleidung, die seine ganze Darlegung characterisirt. Aus dieser Einkleidung, von der nachher noch ausführlicher die Rede sein wird, muss man den eigentlichen Kern seiner Auffassung, soweit diese hier in Betracht kommt, erst herauschälen.

Dass nun Kant, welcher ja die Möglichkeit synthetischer Sätze von aprioristischer Gültigkeit ausdrücklich statuirt, hier von Helmholtz offenbar missverstanden wird, will ich nicht weiter urgiren. Ohne Frage hat Kant zu dem Zustande, dass die Vertreter so vieler von einander verschiedener, ja selbst diametral entgegengesetzter Standpunkte sich fortwährend auf ihn berufen können, durch eine gewisse Inconsequenz, nämlich die teilweise realistisch gefärbte Ausführung seines in der Wurzel idealistischen Systems selber mitgewirkt. Ich begnüge mich hier sachlich zu constatiren, dass die Behauptung von der Unmöglichkeit, synthetische Sätze rein begrifflich zu construiren, jedes Grundes entbehrt.

In der That, wie kommen denn synthetische Sätze zu Stande? Immer nur dadurch, dass dasselbe Ding gleichzeitig unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet wird. Dass das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck der euklidischen Geometrie spitze Winkel von der Grösse eines halben Rechten besitzt, ist ein synthetischer Satz, der weder aus der Gleichschenkligkeit, noch

aus der Rechtwinkligkeit allein deducirt werden kann, sondern nur aus dem Zusammentreffen beider Begriffe.

Dabei spielt natürlich die rein logische Untersuchung, ob die so zusammengebrachten Begriffe sich mit einander vertragen, eine sehr wesentliche Rolle, aber die Annahme, dass das a priori gültige Moment des ganzen zu dem synthetischen Satze führenden Denkprozesses sich auf diese formelle und negative Operation beschränke, ist durchaus unberechtigt. Ehe ich die Zusammenbringung verschiedener Begriffe auf ihre Widerspruchsfreiheit prüfe, muss ich sie erst vorgenommen haben, und diese positive Denkoperation des Combinirens ist ebenfalls ein von aller Erfahrung unabhängiger, ja diese überhaupt erst ermöglichender Prozess, sie ist das schöpferische Element alles Fortschritts in unserer Erkenntnis. Wie sehr Helmholtz dies verkennt, wird sich noch weiterhin zeigen.

Für die Geometrie speziell kommt nun als wesentliches Moment bei den zum System der geometrischen Sätze führenden Combinationen die Anschauung in Betracht; gegen die Meinung, dass den mit Hülfe derselben gewonnenen Ergebnissen eine a priori bestehende, von der Erfahrung unabhängige Geltung beiwohnen könnte, wenden sich die Verfechter der modernen Raumlehre, wendet sich namentlich auch die Riemann-Helmholtzsche Theorie noch ganz direct.

Dabei wird indessen ganz inconsequent verfahren, denn ein wesentlicher Teil der von diesen Theorien ohne weitere Rechtfertigung verwendeten, offenbar als ganz selbstverständlich erachteten Prinzipien und Begriffe stammt ja nur aus derselben Anschauung, deren aprioristische Gültigkeit mit so vielem Nachdruck in Frage gestellt wird. Welcher Irrtum darin liegt, die Grössenbestimmungen der algebraischen Formeln für an sich evidente, von der Raumanschauung unabhängige Erkenntnismittel zu halten, da doch die Begriffe der Gleichheit und Ungleichheit, des Messens und der Zahl nur aus räumlich angeschauten Lagenbeziehungen erwachsen, ist schon oben — im dritten Abschnitt (S. 32 bis 33) — ausführlich erörtert worden, es kann aber nicht nachdrücklich genug betont werden.

Auf der Umkehrung dieses Sachverhalts, auf der Meinung, dass die Grössenbeziehungen das ursprüngliche, die Lagenbeziehungen das abgeleitete Moment seien, beruht aber die ganze, durch die

Aufdeckung dieses Fehlers in ihren Grundlagen erschütterte Riemann-Helmholtzsche Theorie. Im Einzelnen ist zu bemerken, wie Riemann von vornherein von der *Länge* der Linien spricht,⁶²⁾ obwohl doch von solcher ohne die Anschauung, deren grundlegende Bedeutung er eben nicht gelten lassen will, nicht die Rede sein kann, dasselbe gilt natürlich auch von dem Begriffe des ohne weitere Rechtfertigung von ihm verwendeten *Linienelements*. Das in dem Ausdrucke für dieses Element von ihm benutzte Prinzip, dass die gleichzeitige Zeichenänderung zweier Factoren in einem Produkt den Wert dieses Produkts nicht ändere, steht ohne anschauliche geometrische Deutung gleichfalls ganz in der Luft. Die Leichtigkeit, mit der die algebraischen Operationen an positiven und negativen Grössen auf dem Papier ausgeführt werden, hebt die Notwendigkeit nicht auf, die Übertragung dieser doch ursprünglich nur für positive Grössen abgeleiteten Operationen auf das Gebiet des Negativen und Imaginären, samt den Begriffen des Negativen und Imaginären selber auf ihre Berechtigung und ihren Sinn zu prüfen. Man sieht, wie unsicher das ganze von Helmholtz so gepriesene Gebäude der Riemannschen Beweisführung sich bei näherer Besichtigung erweist.

Ebenso verwendet auch das *rein geometrische System*, wie es von den beiden Bolyai und Lobatschewsky aufgestellt worden ist, fortwährend Begriffe, die nur aus der Anschauung herrühren. Es wird da von der *Aussenseite* und der *Innenseite* gesprochen, *Drehungen* und anderweite Bewegungen werden vorgenommen, sowie noch manches andere, und für alle mit solchen Hilfsmitteln zu Stande gebrachte Sätze wird fortwährend die Anerkennung der apodiktischen Gültigkeit beansprucht.

Wenn wirklich, wie Riemann und Helmholtz ursprünglich wollen, die Geometrie einen Inhalt erst durch die Heranziehung der Erfahrung erhielte, so wäre die Bolyai-Lobatschewskysche Geometrie einfach unmöglich. Allerdings macht sie *einen* Umstand, nämlich das Verhalten der Parallelen im Einzelnen, von der Erfahrung abhängig, aber daneben bietet sie doch noch eine ganze Reihe von recht positiven synthetischen Sätzen, deren Geltung an die Erfahrung nicht gebunden ist, von Sätzen namentlich stereometrischer Natur, die sie völlig mit der euklidischen Geometrie gemeinsam hat, und von anderen Sätzen über Raumgebilde, die sie selbst erst geschaffen hat, wie z. B. über die Grenzfläche.

Selbst für die Beziehungen, hinsichtlich deren sie den Appell an die Erfahrung für unabweislich erklärt, gibt sie doch vermöge der ganz speziellen Form der von ihr aufgestellten Gleichungen weit mehr als nur den logischen Rahmen her, der nun durch die Erfahrung mit materiellem Inhalt zu erfüllen wäre. Mit dem ursprünglich von Riemann und Helmholtz eingenommenen Standpunkt lässt sich die Bolyaische Theorie vermöge ihrer eingehenden Durcharbeitung nicht recht vereinigen, allerdings haben auch Riemann und Helmholtz schliesslich selbst diesen Standpunkt aufgegeben, bei dessen Festhaltung sie niemals zu greifbaren Formeln gelangt wären.

Eine besondere Beleuchtung verdienen aber noch die Einzelheiten der *Helmholtz*schen Auffassung, zunächst möge der Schluss seiner zweiten Abhandlung hier wiedergegeben werden, wo er sich, wie folgt, äussert⁶³⁾:

„Übrigens ist es natürlich nicht meine Absicht, zu behaupten, „dass die Menschheit erst durch sorgfältig ausgeführte Systeme „genauer geometrischer Messungen Anschauungen des Raumes, „die den Axiomen des Euklides entsprechen, gewonnen habe. „Es musste vielmehr eine Reihe alltäglicher Erfahrungen, „namentlich die Anschauung von der Ähnlichkeit grosser und „kleiner Körper, welche nur im *ebenen* Raume möglich ist, „darauf führen jede geometrische Anschauung, die dieser That- „sache widerspricht, als unmöglich zu verwerfen. Dazu war „keine Erkenntnis des begrifflichen Zusammenhanges zwischen „der beobachteten Thatsache geometrischer Ähnlichkeit und „den Axiomen nötig, sondern nur durch zahlreiche und ge- „naue Beobachtung von Raumverhältnissen gewonnene an- „schauliche Kenntnis ihres typischen Verhaltens, eine solche „Art der Anschauung, wie sie der Künstler von den darzu- „stellenden Gegenständen besitzt, und mittels deren er sicher „und fein entscheidet, ob eine versuchte neue Combination „der Natur des darzustellenden Gegenstandes entspricht oder „nicht. Das wissen wir zwar in unserer Sprache auch mit „keinem anderen Namen als dem der „Anschauung“ zu be- „zeichnen; aber es ist dies eine empirische durch Häufung „und Verstärkung gleichartig wiederkehrender Eindrücke in „unserem Gedächtnis gewonnene Kenntnis, keine transcen- „dentale und vor aller Erfahrung gegebene Anschauungsform.

„Dass dergleichen empirisch erlangte und noch nicht zur Klarheit des bestimmt ausgesprochenen Begriffs durchgearbeitete „Anschauungen eines typischen gesetzlichen Verhaltens häufig „genug den Metaphysikern als a priori gegebene Sätze imponirt haben, brauche ich hier nicht weiter zu erörtern.“

Diese Worte zeigen auf das Deutlichste, wie Helmholtz bei seiner ganzen Auffassung an der Hauptsache vorbeigeht. Er scheint zu glauben, dass der blosse Anblick der Dinge Erfahrungen schafft, als ob nicht dazu die spontane Thätigkeit des combinirenden Geistes ganz unentbehrlich wäre. Die Gleichheit zweier Dinge ist für mich überhaupt nicht vorhanden, wenn ich sie nicht in Gedanken erfasse, d. h. das eine der beiden Dinge in Gedanken an die Stelle des anderen setze. Die Fähigkeit, dies zu thun, ist es, was vor aller Erfahrung vorhanden sein muss, wenn auch nur die kleinste Erfahrung zu Stande kommen soll, und diese Fähigkeit, die dem menschlichen Geiste a priori beiwohnt, und beiwohnen muss, ist im Wesentlichen identisch mit dem transcendentalen Begriff der Raumanschauung, den Helmholtz unzulässiger Weise mit dem empirischen Begriff der Anschauung identificirt, um ihn auf Grund dieser Begriffsverschiebung *a limine* abweisen zu können.

Nun erledigt sich auch von selbst die von ihm fortwährend begangene Verwechselung zwischen dem Begriff des „Messens“ und der praktischen Verwirklichung dieses Begriffes durch die thatsächlich ausgeführten Messoperationen. Er sagt an einer Stelle⁶⁴⁾ der eben wieder erwähnten zweiten Abhandlung:

„Schliesslich möchte ich nun noch hervorheben, dass die geometrischen Axiome nicht Sätze sind, die nur der reinen Raumlehre angehören. Sie sprechen, wie ich schon erwähnt habe, von Grössen. Von Grössen kann man nur reden, wenn man irgend welches Verfahren kennt und im Sinne hat, nach dem man diese Grössen vergleichen, in Teile zerlegen und messen kann. Alle Raummessung und daher überhaupt alle auf den Raum angewendeten Grössenbegriffe setzen also die Möglichkeit der Bewegung von Raumgebilden voraus, deren Form und Grösse man trotz der Bewegung für unveränderlich halten darf. Solche Raumformen pflegt man in der Geometrie allerdings nur als Körper, Flächen, Winkel, Linien zu bezeichnen, weil man von allen anderen Unterschieden physikalischer und chemischer Art, welche die Naturkörper

„zeigen, abstrahirt; aber man bewahrt doch die eine physi-
„kalische Eigenschaft derselben, die Festigkeit. Für die Festig-
„keit der Körper und Raumgebilde haben wir aber kein anderes
„Merkmal, als dass sie, zu jeder Zeit und an jedem Ort und
„nach jeder Drehung aneinandergelegt, immer wieder dieselben
„Congruenzen zeigen, wie vorher. Ob sich aber die anein-
„andergelegten Körper nicht selbst beide in gleichem Sinne
„verändert haben, können wir auf rein geometrischem Wege,
„ohne mechanische Betrachtungen hinzuzunehmen, gar nicht
„entscheiden.“

und an einer anderen:⁶⁵⁾

„Aber wir dürfen dabei nicht vergessen, dass alle geometrischen
„Messungen schliesslich auf dem Prinzip der Congruenz be-
„ruhen. Wir messen Entfernungen von Punkten, indem wir
„den Zirkel oder den Maassstab oder die Messkette zu ihnen
„hinbewegen. Wir messen Winkel, indem wir den getheilten
„Kreis oder den Theodolithen an den Scheitel des Winkels
„bringen. Daneben bestimmen wir gerade Linien auch durch
„den unserer Erfahrung nach geradlinigen Gang der Licht-
„strahlen; aber dass das Licht sich längs kürzester Linien
„ausbreitet, so lange es in einem ungeänderten brechenden
„Medium bleibt, würde sich ebenso auch auf Räume von
„anderem Krümmungsmaass übertragen lassen. Alle unsere
„geometrischen Messungen beruhen also auf der Voraussetzung,
„dass unsere von uns für festgehaltenen Messwerkzeuge wirk-
„lich Körper von unveränderlicher Form sind, oder dass sie
„wenigstens keine anderen Arten von Formveränderung er-
„leiden, als diejenigen, die wir an ihnen kennen, wie z. B.
„die von geänderter Temperatur, oder von der bei geänderter
„Stellung anders wirkenden Schwere herrührenden kleinen
„Dehnungen. — Wenn wir messen, so führen wir nur mit
„den besten und zuverlässigsten uns bekannten Hilfsmitteln
„dasselbe aus, was wir sonst durch Beobachtung nach dem
„Augenmaass, dem Tastsinn oder durch Abschreiten zu er-
„mitteln pflegen. In den letzteren Fällen ist unser eigener
„Körper mit seinen Organen das Messwerkzeug, welches wir
„im Raume herumtragen. Bald ist die Hand, bald sind die
„Beine unser Zirkel, oder das nach allen Richtungen sich
„wendende Auge der Theodolith, mit dem wir Bogenlängen

„oder Flächenwinkel im Gesichtsfelde abmessen. — Jede „Grössen vergleichende, sei es Schätzung, sei es Messung „räumlicher Verhältnisse geht also von einer Voraussetzung „über das physikalische Verhalten gewisser Naturkörper aus, „sei es unseres eigenen Leibes, sei es der angewendeten „Messinstrumente, welche Voraussetzung übrigens den höchsten „Grad von Wahrscheinlichkeit haben und mit allen uns sonst „bekannten physikalischen Verhältnissen in der besten Über- „einstimmung stehen mag, aber jedenfalls über das Gebiet der „reinen Raumanschauung hinausgreift.“

Zutreffend in diesen Ausführungen ist die in dem erst citirten Passus und im Eingange des zweiten gemachte Bemerkung, dass alle Grössenmessung ohne eine Lagenbetrachtung undenkbar ist, dass sogar der ganze Begriff der Grösse ohne diese Voraussetzung jeden Sinn verliert. Damit liefert Helmholtz selbst das Material zur Widerlegung des Wertes, den er den rein rechnenden Grössenbestimmungen im Gegensatz zu dem mit der Anschauung operirenden Verfahren an anderer Stelle beilegt. Ich darf mich auf meine eigene oben (S. 32 und 33) gegebene Beleuchtung der einschlägigen Helmholtzschen Darlegungen berufen.

Im Übrigen kann man gegen die in den angeführten Sätzen zu Tage tretende Verwechselung der Idee des Messens mit der praktischen Ausführung dieser Idee nicht nachdrücklich genug protestiren. Wie kommt denn der Mensch dazu, Dinge zu „messen“? Doch nur dadurch, dass er sie für vergleichbar hält, eine Meinung, auf die ihn keine Erfahrung bringen kann, die vielmehr in ihm lebendig sein muss, ehe er überhaupt auf den Gedanken der wirklichen Vergleichung durch praktische Messung kommen kann, eine Meinung, für die es natürlich auch ganz gleichgültig ist, welcher Art die ihm praktisch zu Gebote stehenden natürlichen oder künstlichen Messwerkzeuge sind. Er hat den Glauben, dass die Erfahrungsobjecte geometrisch vergleichbar sind, darum und nur darum misst er — solcher Glaube aber ist sinnlos, wenn er nicht den Raum als an allen Stellen und in allen Richtungen gleichmässig gestaltet voraussetzt. Diese Annahme muss eben aller Erfahrung vorausgehen.

Aber die Helmholtzsche Auseinandersetzung leidet auch noch an einem weiteren erheblichen Fehler. Er identificirt *Deckung* und *Aneinanderlegung*, darin zeigt sich eine gewisse Verwandtschaft

mit der unzutreffenden Begründung der angeblichen Unmöglichkeit einer Fernwirkung durch den Satz, dass ein Körper nur da wirken könne, wo er ist, während dem mit Recht entgegengehalten werden konnte, dass auch bei der directen Berührung die Wirkung des activen Körpers sich immer da geltend macht, wo er selber nicht ist.

Zwei aneinandergelegte Körper „decken“ sich nicht in dem Sinne, den die geometrische Theorie mit diesem Worte verbindet, sie decken sich höchstens mit ihren Berührungsflächen und auch dies ist nur der Fall, wenn man im Gegensatz zur Wirklichkeit die Berührungsflächen als ganz genaue geometrische Gebilde ansieht. Will ich Körper auf ihre Congruenz prüfen, so kann ich dies ja allerdings durch eine beschränkte Zahl von Aneinanderlegungen bewirken, weil sich eventuell zeigen lässt, dass das Aneinanderpassen in einer gewissen Zahl von Einzelfällen gar nicht anders möglich ist, als bei voller Congruenz der Körper. Aber die Überzeugung von dieser Congruenz und dem auf diese Art zu führenden Beweise für dieselbe kommt überhaupt nur dadurch zu Stande, dass der praktischen Untersuchung die theoretische Idee von der Möglichkeit vorhergeht, ohne die alles Experimentiren gegenstandslos und alle Folgerungen aus dem Experiment unmöglich sind. Die Notwendigkeit der von vornherein dem menschlichen Geiste innewohnenden Idee der theoretischen Congruenz bildet den wesentlichen Inhalt des Kantschen Satzes von der aller Erfahrung vorausgehenden Raumanschauung, die also nicht empirischer sondern durchaus transcendentaler Natur ist.⁶⁶⁾

Damit erübrigt es sich, die Behauptung noch besonders zu widerlegen, dass von einer Raumvergleichung nur unter Hinzunahme des physikalischen Begriffs der Festigkeit überhaupt die Rede sein könne, denn dieser Begriff würde nur für die zur Ausführung der Messung dienenden Werkzeuge in Betracht kommen.

Es erübrigt sich aber auch ferner, auf die von Helmholtz ausführlich erörterte Möglichkeit⁶⁷⁾ einzugehen, dass die Bewegung im Raume, mag es sich dabei um Verschiebung oder um Drehung handeln, mit gewissen Grössenveränderungen verknüpft sein könne, die uns nur darum nicht zum Bewusstsein kommen, weil die von uns benutzten natürlichen oder künstlichen Messwerkzeuge bei ihrer Bewegung von Ort zu Ort eine ganz entsprechende Änderung

erleiden würden. Wenn dies wirklich der Fall wäre, so berührte dies nur die praktische Messung, nicht die theoretische, aller praktischen Messung vorausgehende Raumanschauung, der ganze Begriff der Grössenänderung („Dehnung“) ist ja überhaupt inhaltlos ohne den stillschweigend zu seinem Verständnis herangezogenen Begriff der Gleichheit. Da aber von Gleichheit nur bei zwei Gegenständen gesprochen werden kann, die sich nicht decken, sondern nur eventuell decken, d. h. genau dieselbe Stelle im Raume ausfüllen würden, so sieht man, dass der Annahme der in allen Punkten und nach allen Richtungen dem Raume beiwohnenden Gleichwertigkeit eine für unser ganzes Denken unabweisliche a priori feststehende Gültigkeit zukommt. — Dass endlich auch die sogenannte Sphärik, beziehungsweise die „elliptische“ Geometrie, die bei Helmholtz übrigens unter dem Einfluss der eben angedeuteten ihm eigentümlichen Ideen eine von ihm näher ausgemalte ganz sonderbare Gestalt annimmt⁶⁸), dass auch diese Form der Geometrie mit dem Prinzip der überall gleichmässigen Structur des Raumes völlig unvereinbar ist, bedarf augenscheinlich in noch geringerem Grade des besonderen Nachweises.

Die Geometrie ist, was Helmholtz und — z. T. wohl auf seine Autorität hin — so viele Andere mit ihm völlig verkennen, eine rein theoretische Wissenschaft, die zwar für die Gewinnung von Erfahrungen von der grössten Bedeutung, selbst aber von der Erfahrung völlig unabhängig ist. In der That, man frage sich: Sind denn die geometrischen Gebilde, Punkt, Linie, Fläche Erfahrungsobjecte? Höchstens könnte man als solche die Körper ansehen, die aber doch auch die reinen geometrischen Formen thatsächlich nie versinnlichen. Die Gebilde von weniger als drei Ausdehnungen sind aber ganz zweifellos reine Fictionen, denen jede selbständige Existenz abgeht, nichts als Mittel des menschlichen Geistes, sich selbst die Erfahrungsobjecte anschaulich und begreiflich zu machen.

Und im Lichte dieser Erwägungen möchte ich hier geradezu die Frage aufwerfen: wie soll denn überhaupt eine Entscheidung über die Richtigkeit oder Unrichtigkeit der euklidischen Geometrie durch die Erfahrung zu Stande kommen? Wie denken sich denn die Vertreter der nichteuklidischen Auffassung solche Entscheidung?

Die vollkommene Unbrauchbarkeit der Lobatschewskyschen Idee, die Winkelsumme grosser im Weltraume zu construirender Dreiecke auf ihre Übereinstimmung mit dem Werte von zwei Rechten zu prüfen, ist schon oben auseinandergesetzt worden. Wie soll es denn nun anders gemacht werden?

Eine genügende Antwort auf die streitige Frage wäre offenbar nur von einer ganz unmittelbaren Prüfung etwa des Umstandes zu erhoffen, ob die Linie gleichen Abstandes von einer Geraden auch selbst gerade, d. h. um zwei ihrer Punkte ohne Lagenänderung drehbar sei. Diese Prüfung setzte aber natürlich ein greifbares Object voraus, sie verlangte also von der Geraden eine Eigenschaft, die sie gar nicht hat und gar nicht haben kann, sie wäre völlig unausführbar für die Linie gleichen Abstandes von einer gegebenen Geraden, ja sie wäre dies schon darum, weil ja die als Grundlinie dienende Gerade selbst erst auf ihre Geradheit geprüft sein müsste und zwar natürlich nicht durch physikalische, etwa optische, sondern durch rein geometrische Bestimmungsmittel. Hier offenbart sich ganz unmittelbar die völlige Unhaltbarkeit der Theorie, die das geometrische System auf die Erfahrung gründen will.

Leider ist *Kant* nicht ohne einigen Anteil an der auf diesem Gebiete eingerissenen Verwirrung, dem wuchtigen Druck, den die Erfolge der exacten Naturwissenschaft auf allen Gebieten der menschlichen Forschung ausüben, ist auch er z. T. unterlegen, soweit unterlegen, dass er die von ihm prinzipiell vertretene Lehre, welche den Raum zu einer von aller Erfahrung unabhängigen Anschauungsform des Geistes stempelt, in gewissen Aussprüchen teilweise verleugnet hat. Einen directen Widerspruch zu dem eigentlich von ihm eingenommenen Standpunkt finde ich z. B. in folgenden, freilich aus einer seiner frühesten Schriften herrührenden, aber von den Vertretern der modernen Raumtheorien gern angeführten Sätzen:⁶⁹⁾

„... Demzufolge halte ich dafür, dass die Substanzen in „der existirenden Welt, wovon wir ein Teil sind, wesentliche „Kräfte von der Art haben, dass sie in Vereinigung miteinander „nach dem doppelten umgekehrten Verhältniss der Weiten ihre „Wirkung ausbreiten; zweitens, dass das Ganze, das daraus „entspringt, vermöge dieses Umstandes die Eigenschaft der „dreifachen Dimension habe; drittens, dass dieses Gesetz will-

„kürlich sei, und dass Gott dafür ein anderes, zum Exempel des „umgekehrten dreifachen Verhältnisses hätte wählen können, „dass endlich viertens aus einem anderen Gesetz auch eine „andere Ausdehnung von anderen Eigenschaften und Ab- „messungen geflossen wäre Eine Wissenschaft von „allen diesen möglichen Raumesarten wäre unfehlbar die „höchste Geometrie, die ein menschlicher Verstand unter- „nehmen könnte Die Unmöglichkeit, die wir bei uns „bemerken, einen Raum von mehr als drei Abmessungen uns „vorzustellen, scheint mir daher zu rühren, dass unsere Seele „ebenfalls nach dem Gesetz des umgekehrten doppelten Ver- „hältnisses der Weiten die Eindrücke von draussen empfängt und „dass ihre Natur selber dazu gemacht ist, nicht allein so zu „leiden, sondern auch auf diese Weise ausser sich zu wirken.“

Von dieser Äusserung, auf deren sachlichen Inhalt übrigens durch die im nächsten Abschnitt folgende Aufdeckung der wirklichen Gründe für die dreifache Ausdehnung des Raumes ein neues Licht fallen wird, hat namentlich der letzte Passus eine besonders verhängnisvolle Wirkung geübt. Der hier von Kant geäusserte Gedanke, die Übereinstimmung zwischen der Erfahrung und unserer Auffassung derselben durch eine gewisse Gleichmässigkeit zwischen der Structur der uns als Erfahrungsgebiet dienenden Welt und der Beschaffenheit unseres diese Welt anschauenden Geistes zu erklären, dieser Gedanke hat in neuerer Zeit eine noch viel schärfere Zuspitzung durch die Hypothese gefunden, nach der Raum und Zeit Anschauungsformen unseres Geistes überhaupt nur vermöge des Umstandes sein sollen, dass die das Denken und Erkennen vermittelnden Organe selbst in den Formen des Raumes und der Zeit gebildet seien.⁷⁰⁾ Die geistvolle und bestechende Art, in welcher diese Hypothese durchgeführt worden ist, macht einen nachdrücklichen Protest gegen die in ihr enthaltene Umkehrung des wahren Sachverhaltes nur um so unabweislicher.

VI.

Directe Begründung der euklidischen Geometrie des dreifach ausgedehnten Raumes.

Durch den im vorangehenden Abschnitt geführten Nachweis der Unmöglichkeit, das geometrische System auch nur zum Teile auf die Erfahrung zu basiren, ist nun der Standpunkt gewonnen,

von dem aus es unternommen werden kann, die Raumlehre aus rein theoretischen a priori gültigen Prinzipien mit logischer Notwendigkeit zu construiren. Selbstverständlich kann diese Herleitung der Grundlagen des geometrischen Systems nicht in den fortwährend auf bereits bestehende „Sätze“ zurückgreifenden Formen erfolgen, die für das Beweisverfahren in weiteren Stadien der geometrischen Theorie ihre Berechtigung haben, eine Untersuchung über die Grundlagen dieser Theorie kann nur in einer von allem Formalismus freien, nach philosophischen Gesichtspunkten gestalteten Erörterung von Begriffen bestehen. Ohne Frage hat die völlige Verkennung dieses Sachverhaltes einen wesentlichen Anteil an den Fehlern, die bei den verschiedenen Beweisversuchen für die geometrischen Axiome untergelaufen sind und schliesslich dem Glauben an die „Unbeweisbarkeit“ dieser Axiome, beziehungsweise des einen Parallelenaxioms zur Herrschaft verholfen haben.

Den Ausgangspunkt der hier vorzunehmenden Herleitung des geometrischen Systems bildet eine Analyse des Sinnes, welcher allgemein — beispielsweise auch, wie oben hervorgehoben worden ist, von Riemann — mit dem Begriffe des Raumes verbunden wird, und nach den Darlegungen des vorangegangenen Abschnittes mit diesem Begriffe auch notwendig verbunden werden muss.

Demnach ist der Raum eine anschauliche, überall gleichmässig gestaltete Mannigfaltigkeit von mehrfacher Ausdehnung, d. h. ein Inbegriff von Elementen, deren jedes durch eine von vornherein feststehende — übrigens noch näher zu ermittelnde — Zahl von gegenseitig völlig unabhängigen Grössenänderungen ganz gleicher Art bestimmt wird. Aus diesem Prinzip lässt sich die ganze Geometrie herleiten.

Das Raumelement, welches durch Annahme je eines einzigen festen Wertes für jede einzelne der veränderlichen Grössen bestimmt wird, soll dabei in üblicher Weise als *Punkt*, der Inbegriff aller Punkte, wofür die Zahl der vorhandenen Grössenbestimmungen um *Eins* kleiner ist als die Zahl der überhaupt möglichen, soll gleicherweise als *Linie*, der Inbegriff aller Punkte, wofür der Unterschied der beiden eben gedachten Zahlen den Wert *Zwei* besitzt, als *Fläche* bezeichnet werden. Aus der überall bestehenden Gleichmässigkeit des Raumes folgert man, dass die durch Veränderung einer einzigen Grössenbestimmung entstehende Linie

aus lauter congruenten Teilen zusammengesetzt ist, wenn man es nicht vorzieht, umgekehrt das Vorhandensein dieser Zusammensetzung als die unentbehrliche Bedingung dafür anzusehen, dass überhaupt von unter sich vergleichbaren Grössenbestimmungen geredet werden kann.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nun möglich einzusehen, dass die von vornherein unbestimmt gelassene Ausdehnungszahl des Raumes gerade den Wert *Drei* haben muss.

Zur Gewinnung dieser Einsicht muss man sich zunächst klar machen, dass die Möglichkeit einer Einschränkung für die Dimensionszahl überhaupt nur in der Anschaulichkeit liegen kann, weil ja sonst gar kein Hindernis besteht, die Zahl der zu einer Mannigfaltigkeit vereinigten veränderlichen Grössen in's Unbegrenzte zu steigern. Analysirt man aber den Begriff der Anschaulichkeit, so erkennt man bald als wesentliches Merkmal desselben dies, dass man die in Betracht gezogenen Elemente nicht nach einander, sondern mit einem Male zu erfassen im Stande ist, d. h. bei Anwendung auf die Mannigfaltigkeit, dass man diese nicht als Inbegriff von Punkten anzusehen braucht, sondern aus Elementen aufbauen kann, die selbst wieder als Inbegriffe von Punkten anzusehen sind, also Linien, Flächen, vielleicht auch noch Gebilden höheren Ranges.

In der That werden durch diese Möglichkeit ganz neue Begriffe geschaffen, die der als reines Punktsystem betrachteten Mannigfaltigkeit fehlen, nämlich die Begriffe, durch welche die gegenseitigen Beziehungen der eben gedachten höheren Raumelemente zur Fixirung gelangen, vor allem der Begriff des Winkels, auf welchen keine von der Anschauung ausdrücklich absehende Auffassung der Mannigfaltigkeit jemals kommen kann.

Nun liegt es im Wesen jeder Mannigfaltigkeit nach der oben von ihr gegebenen Begriffsbestimmung begründet, dass man von jedem ihrer Punkte durch Änderung *einer* der veränderlichen Grössen nach zwei Seiten hin fortschreiten kann. Infolgedessen wird jede durch die Grössenänderung einer einzigen Variablen charakterisirte Linie durch jeden ihrer Punkte in zwei Teile geteilt, die ein zueinander direct entgegengesetztes Verhalten zeigen, insofern der eine durch dieselbe Grössenänderung zu Stande kommt, durch welche die Bildung des anderen wieder vernichtet wird. Es ist dies der Gegensatz, welchen die Algebra durch

den Unterschied der Vorzeichen zum Ausdruck bringt. Aus der vollkommenen Gleichwertigkeit der sämtlichen von irgend welchen Stellen des Raumes aus vorzunehmenden Grössenänderungen ergibt sich dabei die symmetrische Congruenz der beiden soeben besprochenen Linienhälften.

Fasst man ferner den Inbegriff der Punkte in's Auge, die durch die unbeschränkte Änderung von zwei der überhaupt vorhandenen Variablen bei Festhaltung ganz bestimmter Werte für alle übrigen erhalten werden, also ein Raumgebilde, welches nach den oben gegebenen Definitionen als *Fläche* zu bezeichnen ist, so lässt sich auch für ein solches Gebilde ein Gegensatz zwischen zwei Auffassungen construiren.

Beispielsweise fasse solches Gebilde alle die Punkte in sich, die aus irgend einem Punkte lediglich durch die beliebige Veränderung der Variablen x_1 und x_2 hervorgehen. Dann lassen sich durch jeden Punkt der Fläche innerhalb derselben zwei Linien ziehen, auf deren einer alle die Punkte liegen, welche bei unverändertem Werte von x_1 durch die Grössenänderung von x_2 erhalten werden, während die andere die Punkte von constantem x_2 und variablem x_1 in sich begreift. Jede von solchen zwei Linien zerfällt durch den ihnen beiden gemeinsamen Punkt in zwei Hälften, die nach den vorher gemachten Bemerkungen zu einander im Gegensatz des Positiven und des Negativen stehen. Und in der Fläche sind demnach von jedem Punkte aus vier Strahlen zu construiren, deren Unterscheidung durch die Bezeichnungen

$$(30) \dots\dots\dots + x_1, + x_2, - x_1, - x_2$$

einer Unklarheit nicht wohl unterliegen kann.

Da aber die Grössenänderung der x_1 von der der x_2 völlig unabhängig ist, so existirt keine Ursache, die angegebenen Strahlen gerade in der eben gedachten Ordnung aufzuzählen, die Linie (x_1) im Ganzen steht zu der positiven Hälfte von der Linie (x_2) in genau demselben Verhältnis, wie zur negativen und es ist darum die Anordnung ebenso berechtigt:

$$(31) \dots\dots\dots + x_1, - x_2, - x_1, + x_2,$$

während eine dritte Anordnung überhaupt vermöge des Umstandes undenkbar ist, dass die beiden Hälften von jeder der beiden in Rede stehenden Linien eben wegen des zwischen ihnen bestehenden Gegensatzes durch die zu beiden Hälften neutrale andere

Linie getrennt sein müssen, alle Variationen aber, welche durch einen etwaigen anderen Anfang in der cyclischen Anordnung der vier Strahlen hervorgebracht werden können, offenbar belanglos sind.

Dieser eben näher beschriebene Sachverhalt lässt sich dahin zusammenfassen: Die Fläche, innerhalb deren die Grössenänderungen der Variablen x_1 und x_2 sich vollziehen, ist einer doppelten Auffassung fähig, für ihre Anschauung als eines Ganzen existirt eine *zweifache* durch die Wahl zwischen den beiden eben besprochenen Anordnungen bedingte Möglichkeit.

Hat man nun eine *dreifach* ausgedehnte Mannigfaltigkeit, d. h. existirt ausser x_1 und x_2 noch eine dritte Variable x_3 , so muss die durch irgend einen Punkt der Ebene $(x_1 x_2)$ gelegte Linie, deren sämtliche Punkte mittels ausschliesslicher Grössenänderung von x_3 erhalten werden, durch jene Fläche in zwei Hälften entgegengesetzten Charakters, die als $+x_3$ und $-x_3$ zu bezeichnen sein würden, zerfallen. Der Umstand, dass diese Trennung gerade in dem der Linie (x_3) mit der Fläche $(x_1 x_2)$ gemeinsamen Punkte erfolgt, bedingt die Notwendigkeit eines *gegensätzlichen* Verhaltens der beiden Hälften jener Linie zu dieser Fläche, die Erfüllung dieser Bedingung aber wird ermöglicht durch die *doppelte Auffassung*, deren — wie bewiesen — die Fläche $(x_1 x_2)$ fähig ist. Es liegt also die Sache so, dass diese Fläche in der Auffassung, welche die unter No. (30) gegebene Anordnung mit sich führt, zu der einen (etwa der positiven) Hälfte der Linie (x_3) genau dieselbe Beziehung hat, wie in der durch die Anordnung No. (31) repräsentirten Auffassung zu der anderen (negativen) Hälfte jener Linie.

Hieraus ergibt sich nun zunächst eine einwandsfreie Entscheidung der Frage nach der Unendlichkeit des Raumes. Mit Recht macht *Riemann* in seiner mehrbesprochenen Abhandlung⁷¹⁾ einen wesentlichen Unterschied zwischen der Unbegrenztheit und der Unendlichkeit, für die erste nimmt er eine empirische Gewissheit der stärksten Art beim Raume an, die letztere würde nach seinen Darlegungen in dem Augenblicke aufhören, wo man genötigt wäre, dem Raume ein constantes *positives* Krümmungsmaass von wenn auch noch so kleinem Betrage zuzuschreiben.

Die Unbegrenztheit, die demnach *Riemann* von vornherein für den Raum in Anspruch nimmt, wird man um so unbedenklicher statuiren können, als man für dieselbe sich ja nicht mit der

empirischen Gewissheit zu begnügen braucht; man ist genötigt, sie anzunehmen, weil nirgends eine Stelle zu finden ist, an der für die Annahme einer Begrenzung ein „zureichender Grund“ existierte, oder auch, wenn man will, weil das Vorhandensein einer Begrenzung an irgend welchen Stellen dem Prinzip der durchweg gleichmässigen Raumgestaltung widerstreiten würde.

Die Hypothese eines zwar unbegrenzten, aber endlichen Raumes und die auf diese Hypothese gegründete Geometrie des in sich zurückkehrenden Raumes, die „elliptische“ (beziehungsweise „sphärische“) Geometrie ist im Vorstehenden nicht besonders erörtert worden. Es rechtfertigt sich dies schon daraus, dass der Fall des für diese Geometrie nach Riemann charakteristischen positiven Krümmungsmaasses aus Riemanns eigener Theorie als unmöglich aufgezeigt worden ist; im vierten Abschnitt wurde aus der Natur der beiden von Riemann aufgestellten Ausdrücke für das Linienelement eingehend nachgewiesen, dass die vollkommene Gleichmässigkeit des Raumes eben nur für ein „Krümmungsmaass“ vom Werte *Null* bestehen kann. Dass ausserdem eine in sich zurückkehrende, aus lauter congruenten Elementen bestehende Linie, rein geometrisch betrachtet, mit der Grundeigenschaft der Geraden, durch zwei Punkte völlig eindeutig bestimmt zu sein, nicht verträglich ist, liegt auf der Hand. Durch je zwei diametral gegenüberliegende Punkte solcher Linie würden ja *nicht eine*, sondern *zwei* völlig gleichwertige Linien bestimmt.

Indessen befriedigen diese mehr formalen Erwägungen nicht das Bedürfnis nach einer tieferen positiven Darlegung der Gründe, aus welchen dem Raume die Unendlichkeit zugesprochen werden muss. Diese Gründe enthüllen sich aber mit aller wünschenswerten Klarheit in der doppelten Auffassung, deren die Ebene ($x_1 x_2$) fähig ist, und der dadurch bedingten Gegensätzlichkeit der beiden Hälften, in welche sie die Linie (x_3) teilt. Es ist unmöglich, durch eine stetig in demselben Sinne erfolgende Grössenänderung der Variablen x_3 zu dem Ausgangspunkte zurückzukehren, ohne diese Gegensätzlichkeit aufzuheben. In dieser, für alle Grundabmessungen selbstredend gleichmässig bestehenden Unendlichkeit offenbart sich die allseitige Unendlichkeit des Raumes.

Hätte ferner der Raum noch eine *vierte* Dimension (x_4), so müssten die beiden Hälften, in welche jede durch blosse Grössen-

änderung von x_4 entstehende Linie durch irgend welchen ihrer Punkte geteilt wird, in einer der eben beschriebenen Beziehung ganz ähnlichen Beziehung zu dem dreifach ausgedehnten Inbegriff aller Punkte stehen, die durch die Änderung der Grössen x_1, x_2, x_3 von dem auf der Linie (x_4) angenommenen Punkte aus erhalten werden. Dazu wäre aber unumgänglich erforderlich, dass diese dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit einer mit Notwendigkeit aus ihrer Constitution folgenden doppelten Auffassung fähig wäre, um in der einen von den beiden demgemäss einzig möglichen Auffassungen zu $+x_4$ in genau demselben Verhältnis zu stehen, wie in der anderen zu $-x_4$.

Man sieht sofort, dass dies ganz unmöglich ist, schon deswegen, weil das Coordinatensystem innerhalb einer solchen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, wie auch nachher noch eingehender dargelegt werden wird, ein ganz beliebiges ist. Aber auch für irgend ein festgelegtes Coordinatensystem lässt sich eine solche zweifache Auffassung des dreifach ausgedehnten Raumes nicht herstellen. Jedenfalls müsste, wie vorher die Fläche ($x_1 x_2$) durch Bewegung einer Linie beschrieben wurde, der Raum ($x_1 x_2 x_3$) als Ergebnis der Bewegung einer Fläche aufgefasst werden. Diese Bewegung könnte eine Drehung oder eine Verschiebung sein, bei jeder der beiden Bewegungsarten würde immer eine der Coordinatenachsen eine andere Rolle spielen müssen, als die die beiden übrigen umfassende Fläche, sei es dass sie als Axe für die Drehung, sei es dass sie als die Linie dient, welche die Verschiebungsrichtung bestimmt. Und da keine der drei Axen einen Vorzug vor den beiden anderen hat, gelangt man unter allen Umständen statt zu einer zweifachen, zu einer dreimalzweifachen Auffassung des in Rede stehenden Raumes. Die Beliebigkeit des Coordinatensystems steigert selbstverständlich die Zahl der denkbaren Auffassungen in's Unendliche.

Im Übrigen ist, wie leicht zu sehen, die soeben angestellte, unmittelbar die vollkommene Unmöglichkeit der vierten Raumdimension klarlegende Betrachtung wesentlich eine Vertiefung der Beweisführung, durch welche bereits im vierten Abschnitt solche Unmöglichkeit nachgewiesen wurde, sie bietet aber insofern noch mehr, als sie — wie eine Analyse der eigenen Empfindungen für jeden Leser ausser Zweifel stellen dürfte — nur die Momente in aller Strenge formulirt, auf Grund deren das unbefangene

Gefühl sich von jeher gegen die Annahme eines Raumes von mehr als drei Ausdehnungen gesträubt hat.

Mit der vierten Dimension fällt selbstverständlich auch die fünfte, sowie jede noch höhere Dimension, da es ja im Begriffe der Mannigfaltigkeit liegt, dass in einer solchen alle Mannigfaltigkeiten niederer Ordnung enthalten sein müssen. Demnach kann man sagen: eine Mannigfaltigkeit von mehr als dreifacher Ausdehnung entbehrt notwendig der Anschaulichkeit, d. h. sie entbehrt der realen Existenz, die eben doch nur in dem gleichzeitigen und gerade durch diese Gleichzeitigkeit anschaulichen Nebeneinanderbestehen aller ihrer Elemente begründet sein würde.

Man sieht aber auch leicht, dass die Dimensionszahl des Raumes nicht unter die Zahl *Drei* heruntergehen kann, dass also die Annahme selbständiger zweidimensionaler Wesen ein Unding ist. Denn die gegenseitige Unabhängigkeit der in der Mannigfaltigkeit auftretenden Abmessungen zieht ja die bereits mehrfach benutzte Folgerung nach sich, dass von den beiden Hälften der Linie (x_1), d. h. $+x_1$ und $-x_1$, keine zu einer der beiden Hälften einer anderen Grundlinie ($+x_2$ und $-x_2$) eine besondere Beziehung hat. Zu der ganzen Linie (x_2) können aber $+x_1$ und $-x_1$ darum kein gegensätzliches Verhältnis zeigen, weil diese Linie einer anderen, als der durch die beiden Vorzeichen zum Ausdruck gebrachten doppelten Auffassung gar nicht fähig ist.

Daraus resultirt eine gewisse Unbestimmtheit, die mit dem innersten, auf zweifellose Bestimmtheit gegründeten Begriff der selbständigen Existenz nicht verträglich ist. Solche Bestimmtheit kommt in den Raum erst hinein durch die dritte Dimension, die jeder einzelnen der beiden anderen Dimensionen unabhängig gegenübersteht, während sie zu den beiden Seiten der aus den beiden ersten gebildeten Fläche ein ganz bestimmtes, nach ihren eigenen beiden Hälften differentiirt Verhalten zeigt.

Alles dies zusammenfassend ist man zu der Behauptung berechtigt: Einer Mannigfaltigkeit kommt Selbständigkeit nur zu unter der Voraussetzung der dreifachen Ausdehnung.

In diesem dreifach ausgedehnten allseitig unendlichen Raume, dessen drei Grundabmessungen in üblicher Weise weiterhin *Coor-*

dinaten genannt und mit den Buchstaben x , y , z bezeichnet werden mögen, soll nun die innere Structur untersucht werden. Die Basis der Untersuchung bildet auch hier der oben aufgestellte, nunmehr nur durch die Fixirung der Ausdehnungszahl noch genauer bestimmte Raumbegriff.

Aus der Anschaulichkeit des Raumes lässt sich nun namentlich auch noch die Folgerung ziehen, dass jeder durch irgend welche Werte der drei Coordinaten bestimmte Punkt auch zu dem gemeinsamen Ausgangspunkt der Coordinatenbestimmung eine ganz unmittelbare Beziehung hat, also durch *eine einzige* Grössenänderung von ihm aus erhalten werden kann. Diesem an sich einleuchtenden Sachverhalt lässt sich auch ein mehr formelmässiger dem herkömmlichen Beweisverfahren der Mathematik angepasster Ausdruck in der Weise geben, dass man sagt: Es muss für alle den eben gedachten Punkt mit dem Ausgangspunkt der Coordinaten in stetiger Folge verbindenden Punkte eine Bestimmung geben, vermöge deren diese Punkte durch eine einzige Grössenänderung erhalten werden, dies wird aber durch zwei Gleichungen zwischen den drei veränderlichen Coordinaten jener Punkte gerade geleistet, denn die eine Variable, auf welche durch diese zwei Gleichungen jene drei Coordinaten zurückgeführt werden können, würde eben die verlangte neue Coordinate sein.

Macht man hievon die Anwendung auf einen Punkt der Ebene ($x\ y$), so würde man die beiden ihn bisher bestimmenden Coordinaten durch eine einzige neue ersetzen können, bei diesem Verfahren würde die z -Coordinate in keiner Weise in Mitleidenchaft gezogen werden.

Die gegenseitige Unabhängigkeit, welche zwischen drei Coordinatenrichtungen vorausgesetztermaassen besteht, hat dann mit logischer Notwendigkeit zur Folge, dass die Coordinate z sich gegen das Ergebnis der völlig ohne ihre Inanspruchnahme bewirkten Combination von x und y gerade so neutral verhalten muss, wie gegen x und y selber.

Jede Linie, die durch blosse Variation von z bei Festhaltung constanter Werte für x und y entsteht, hat gegen jede Linie, die durch Veränderung von x und y bei unveränderlichem z hervor gebracht wird, die völlig gleiche Beziehung, d. h. im anschaulichen Raume dieselbe *Lage*. Daraus folgt insbesondere, dass die Linien der gedachten Fläche unter sich ihre Rollen vertauschen können,

d. h. dass diese Fläche in sich drehbar ist ohne irgend welche Veränderung des Verhältnisses der in ihr enthaltenen Linien zur z -Axe.

Erwägt man nun, dass die z -Axe als Trägerin einer Coordinatenabmessung im überall gleichmässig gestalteten Raume notwendig aus lauter in sich congruenten Bestandteilen zusammengesetzt ist, so erkennt man, dass sie alle die Eigenschaften besitzt, die von der nichteuklidischen Geometrie in voller Übereinstimmung mit der euklidischen zur Definition der *Geraden* benutzt zu werden pflegen. Denn der Umstand, dass jede der durch irgend einen constanten Wert von z als Parameter characterisirten, die Variablen x und y in sich schliessenden Flächen durch eine Drehung in sich vollkommen die gleiche Beziehung gegen die z -Axe beibehält, ist offenbar identisch mit der Eigenschaft der letzteren, durch eine Drehung um zwei ihrer Punkte in ihrem Lagenverhältnis gegen den gesamten übrigen Raum keinerlei Änderung zu erleiden. Selbstverständlich kommt die Eigenschaft der Geradheit mit demselben Rechte auch den Coordinatenaxen x und y zu.

Zugleich ergibt sich die Natur der Fläche, die bei constantem Werte einer Coordinate die sämtlichen durch beliebige Veränderung der beiden anderen Coordinaten entstehenden Punkte in sich schliesst. Die Variation einer der beiden in ihr enthaltenen Fundamentalgrössen unter Festhaltung eines bestimmten Wertes für die zweite liefert, da ja auch die dritte Coordinate von vornherein constant ist, vermöge der eben auseinandergesetzten Verhältnisse eine Gerade. Diese Gerade fällt demnach in ihrer ganzen Länge in die gedachte Fläche und diese Fläche besitzt mithin das Merkmal, durch welches in der Planimetrie die *Ebene* definirt zu werden pflegt. Dass diese Fläche als Inbegriff ihrer aus lauter congruenten Teilen zusammengesetzten Geraden selbst in allen Teilen ganz gleichmässig gestaltet ist, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung, ebenso wie die überall gleichmässige Constitution des Raumes es bedingt, dass alle Geraden, sowie alle Ebenen unter sich congruent sind.

Es sind uns also die Begriffe der *Geraden* und der *Ebene* von selbst erwachsen und zwar aus keiner anderen Wurzel, als der Combination dreier einfacher Prinzipien, der Anschaulichkeit, der Gleichwertigkeit und der Unabhängigkeit, ohne irgend welchen complicirten Beweis, der auch für die Einführung dieser räumlichen

Grundelemente gar keinen Sinn haben würde. Wenn man sich beispielsweise bemüht, die Existenz von Linien nachzuweisen, die um zwei in ihnen gelegene Punkte sich drehen lassen, so täuscht man sich selber, denn im Hintergrunde der ganzen Beweisführung steht als stillschweigend angenommene Voraussetzung bereits die durch jene zwei Punkte bestimmte Drehungsaxe, deren Vorhandensein zu beweisen man eben bestrebt ist.

Im Gegensatz dazu ist es wichtig festzustellen, dass das für alle anderen Raumgebilde als Norm und Anhalt dienende Grundgebilde der Geraden eben gar nichts anderes ist, als der Träger einer der fundamentalen gegenseitig unabhängigen Abmessungen, durch welche der Raum sich als eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit kennzeichnet.

Im Übrigen ist klar, dass die eben durchgeführte Herleitung auf dem Boden desselben Gedankenganges erwachsen ist, aus welchem heraus im dritten und vierten Abschnitt die Eindeutigkeit der Ergebnisse bei gewissen *successiv* vorgenommenen Constructionen und in engem Zusammenhange damit die *associative* Beschaffenheit gewisser Ausdrücke für Strecken und Linienelemente gefordert wurde.

Mit diesem Zusammenhange reimt es sich auch, dass aus der vorstehenden Darlegung die vollkommen willkürliche Veränderlichkeit des angenommenen Coordinatensystems hervorgeht.

Wie man bei Festhaltung einer Coordinatenrichtung — etwa z — die beiden anderen — x und y — zur Herstellung einer neuen Coordinate verwenden kann, ist schon oben dargelegt worden, es steht aber nichts im Wege, diese neue, den bisherigen Coordinaten ganz gleichwertige Coordinate mit der zu combiniren, die bei ihrer Herstellung nicht beteiligt war, und darum, wie auch schon hervorgehoben wurde, zu ihr ganz dasselbe Lagenverhältnis besitzt, wie zu den beiden Urcoordinaten. In dieser Weise kann man nach allen von einem Punkte ausgehenden Richtungen neue Coordinaten schaffen, die den alten vollständig gleichwertig sind, d. h. die Existenz der Geraden und damit auch der Ebene ergibt sich für den hier betrachteten Raum in ganz demselben Umfange, wie es die euklidische Raumlehre schon immer angenommen hat.

Die vorstehend gegebene Darlegung enthält bereits *in nuce* die Rechtfertigung der euklidischen Geometrie.

Wie bekannt, ergibt sich diese in aller Strenge aus dem Prinzip, dass eine Linie, die von einer Geraden überall denselben Abstand hat, selbst gerade ist, d. h. wie schon früher (S. 17) bemerkt, aus dem Inhalt der Vorstellung, die von jeher für das unbefangene Gefühl mit dem Begriff des Parallelismus verbunden gewesen ist.

Nun sind die Träger der Grundabmessungen, durch welche die Punktbestimmung erfolgt, wie bewiesen, die Geraden in genau demselben Sinne, den alle Geometer mit diesem Worte verbinden. Diese Grundabmessungen sind von einander unabhängig.

Gehe ich daher von irgend zwei Punkten einer Geraden auf den Geraden vorwärts, die Träger einer zweiten Fundamentalabmessung sind, so kann die gegenseitige Lagenbeziehung der beiden Punkte, welche ich durch ganz gleichmässiges Vorgehen im Sinne dieser zweiten Abmessung erhalte, insoweit keine Änderung erfahren haben, als sie durch die erste Fundamentalabmessung bestimmt ist, denn sonst wäre ja die erste Fundamentalabmessung von der zweiten nicht unabhängig. Zwei Linien von der eben geschilderten Beschaffenheit sind aber *Parallelen im euklidischen Sinne*, die von ihnen unabhängige Lagenbeziehung zwischen je zwei entsprechenden Punkten auf ihnen ist nichts anderes, als *der Abstand dieser Punkte*, der demnach das für die euklidische Geometrie charakteristische Merkmal der Unveränderlichkeit besitzt.

Will man diese Deduction dem herkömmlichen Beweisschema-tismus der Mathematik mehr anpassen, so ist es nötig, den Begriff des *Winkels* festzustellen, der — wie schon bemerkt — ein lediglich durch die Forderung der Anschaulichkeit in den Begriff der Mannigfaltigkeit hineingetragener Begriff ist.

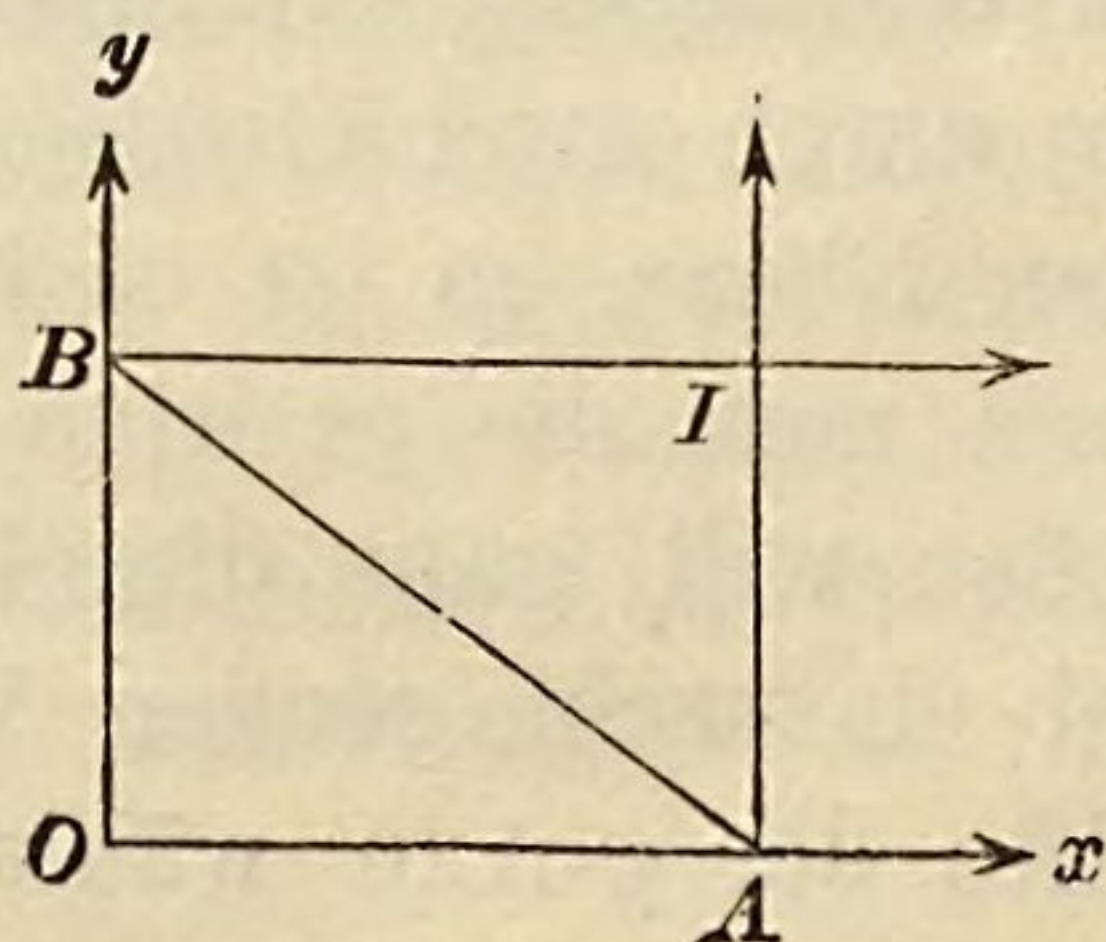
Versteht man unter dem Winkel das Maass der Drehung, welches zu einer Lagenveränderung erforderlich ist und bleibt man zunächst innerhalb der durch zwei Grössenänderungen, etwa die von x und y bestimmten Ebene, so ist es klar, dass die Drehung, die zu machen ist, wenn man die positive Hälfte der x -Axe mit der negativen vertauschen will, ganz dieselbe Grösse haben muss, ob man nun den dabei einzuschlagenden Weg über die positive oder die negative Hälfte der y -Axe wählt — das ist eine un-

mittelbare Folge der gegenseitigen Unabhängigkeit beider Coordinaten. Eine andere ebenso einfache Folge dieser Unabhängigkeit ist die, dass die Drehung von jeder Hälfte der x -Axe bis zu jeder der beiden Hälften der y -Axe die gleiche Grösse besitzen muss. Nimmt man hiezu noch die aus der vollkommenen Gleichwertigkeit der Punkte des Raumes fliessende Reciprocität der fundamentalen Grössenbestimmungen, so gelangt man zu dem Ergebnis, dass der Winkel zwischen je zwei solchen als Träger der unabhängigen Grundabmessungen fungirenden Geraden den vierten Teil einer vollen Umdrehung repräsentirt, während die Hälfte einer solchen vollen Umdrehung den negativen und den positiven Teil derselben Graden ihre Rollen vertauschen lässt, der erstgedachte Winkel ist mithin die Hälfte des von den beiden Teilen einer und derselben Graden gebildeten sogenannten *gestreckten Winkels*, er führt den Namen des *Rechten*.

Die gleiche Lagenbeziehung, wie sie zwischen der x -Axe und der y -Axe unter sich besteht, existirt ja nun aber auch für jede dieser Axen zur z -Axe, und auch für jede in der Ebene (xy) durch Combination von x und y gebildete neue Axe, die durch den Schnittpunkt mit der z -Axe geht, gegenüber dieser letzteren, d. h. die z -Axe steht auf der Ebene (xy) senkrecht, dieses Senkrechtstehen in dem Sinne verstanden, der damit in der euklidischen, wie in der nichteuklidischen Geometrie gleichmässig verbunden wird.

Und nun ist es nur noch ein kleiner Schritt bis zu dem berühmten Satze, dessen angebliche Unbeweisbarkeit den Ausgangspunkt für die sämtlichen in dieser Schrift bekämpften Raumtheorien gebildet hat. Wenn die verschiedenen Grössenänderungen, durch welche die Punkte im Raume von irgend welchem Ausgangspunkte aus bestimmt werden, die ihnen hier von vornherein zugeschriebene gegenseitige Unabhängigkeit besitzen, so muss vor allem auch die Reihenfolge, in welcher sie vorgenommen werden, gleichgültig sein.

Fig. 9.



Bleibe ich also in der Ebene ($x y$) und bestimme in ihr von O aus einen Punkt durch die Coordinaten x und y dergestalt, dass ich von O aus zunächst eine Strecke von der Grösse x und von deren Endpunkt A aus unter einem rechten Winkel zu ihr die Strecke y abmesse, so muss ich ganz denselben Punkt J erhalten, als wenn ich von O aus zunächst senkrecht zur x -Axe die Strecke y bis B und dann senkrecht zu OB von B aus x abmesse, d. h. in dem Viereck $OAJB$, welches von vornherein bei O , A und B rechte Winkel enthält, sind die Gegenseiten gleich. Daraus folgt, dass die Diagonale AB das Viereck in zwei congruente Hälften zerlegt, dass also auch der vierte Winkel desselben ein Rechter ist, woraus sich für jedes der Teildreiecke eine Summe von zwei Rechten und damit die Basis der euklidischen Geometrie ergibt.

Es ist sehr bemerkenswert, dass diese Basis hier schon durch eine im zweidimensionalen Raume sich abspielende Betrachtung gewonnen wird, während die im zweiten Abschnitt bewirkte spezielle Widerlegung der Consequenzen der nichteuklidischen Geometrie, ebenso wie ein Teil der gegen die Riemannschen Formeln erhobenen Einwendungen gerade auf der Verwendung der dritten Raumdimension beruhte. Diese Vereinfachung des Beweisganges ist aber nur das natürliche Ergebnis der vertieften, unmittelbar an den Begriff der Raumanschauung anknüpfenden Auffassung, welche in dem vorliegenden Abschnitt die Grundlage der ganzen Erörterung bildet.

Im Übrigen sei auch hier nochmals hervorgehoben, dass der so eben an der Figur 9 geführte speziell mathematische Beweis nur die Bedeutung einer den herkömmlichen Beweisformen angepassten Einkleidung für den vorher mitgeteilten Gedankengang besitzt. Den Anforderungen an logische Schärfe genügt dieser letztere bereits vollkommen, den eigentlichen Sachverhalt bringt er sogar zum noch deutlicheren Ausdruck.

Man kann nun die vorstehende Argumentation auch noch mit einigen Formeldarstellungen begleiten. Wenngleich, wie sich bei der grundlegenden Natur der hier einschlagenden Betrachtungen von selbst versteht, solche Formeln nicht als Beweismittel, höchstens als Bestätigungen anzusehen sind, so dienen sie doch dazu,

die Sachlage in einem etwas veränderten Lichte erscheinen zu lassen, geben zu gewissen eine weitere Perspective eröffnenden Folgerungen Anlass und sind darum nicht ohne ein gewisses Interesse.

Auf Grund der von *Gauss* herrührenden Darstellung des Imaginären hat man bekanntlich für den durch die Coordinaten x und y repräsentirten Punkt den Ausdruck $x + iy$, wenn $\sqrt{-1} = i$ gesetzt wird. Aus der Anerkennung dieser Darstellung würde sich sofort die Existenz des in der Figur 9 construirten Vierecks mit allen an diese Existenz geknüpften Folgerungen ergeben, sobald man in dem genannten Ausdruck die Summanden x und iy mit einander vertauscht.

Dagegen wird man nun freilich einwenden, dass das formelle Operiren mit den algebraischen Ausdrücken keine Gewähr für das thatsächliche Vorhandensein der durch dieses Operiren angeblich dargestellten Sachverhältnisse liefert, ja es ist sogar bezweifelt worden, ob man die Vertauschbarkeit der Summanden für die Verbindung reeller und imaginärer Grössen, d. i. gerade den Angel-punkt der soeben an das Gauss'sche Darstellungsprinzip versuchsweise geknüpften Deduction aufrecht erhalten könne.

So wenig man die subjective Berechtigung zur Geltendmachung solcher Bedenken bei den Vertretern der modernen Raumtheorien anerkennen kann, weil dieselben sich in keiner Weise davor scheuen, in ihren Formeln reelle durch imaginäre Grössen zu ersetzen und aus dem Ergebnis solcher Operation die weittragendsten Schlüsse zu ziehen⁷²⁾, so kann man doch objectiv nicht leugnen, dass die oben versuchte Beweisführung einer gründlichen Untersuchung auf ihre Berechtigung bedarf. Und zwar ist zu untersuchen erstens, was eine Summe an sich sowohl, wie in ihrer Anwendung auf die Geometrie bedeutet, zweitens ob die Gauss'sche Interpretation des Imaginären nicht die durch ihre Verwendung zu begründende Lehre der euklidischen Geometrie als stillschweigende Voraussetzung in sich enthält. Beide Untersuchungen hängen eng zusammen.

Dass man vom Begriffe der Summe das Merkmal der Vertauschbarkeit der Summanden nicht ablösen kann, ohne den ganzen Begriff aufzuheben, bedarf kaum der Erwähnung, man muss bei der so eben angekündigten Untersuchung an einer ganz anderen Stelle einsetzen.

Nun sieht man bald, dass für die Operation der Addition weit mehr als nur die Vertauschbarkeit der Summanden gefordert

wird. Es ist ein wesentliches Moment in derselben, dass das Ergebnis der immer wiederholten Addition durch Hinzufügung je eines neuen Summanden zu bereits gebildeten Summen von der Reihenfolge der überhaupt zur Verwendung gelangten Grössen unabhängig ist. Mit anderen Worten: die *Summe* gehört zu den schon mehrfach in dieser Schrift verwendeten Ausdrücken, die man als *associativ* zu bezeichnen pflegt, für die, wenn man solchen Ausdruck mit $P(xy)$ bezeichnet, die Bedingung gilt, dass der Wert von $P(P(xy)z)$ durch beliebige Vertauschung von x, y, z sich nicht ändert. Zur Klasse dieser Ausdrücke gehören bekanntlich neben der Summe noch unendlich viele andere, wie das *Product*, der Ausdruck $\frac{x + y}{1 + xy}$, überhaupt die in den reinen Funktionalgleichungen, z. B. den Additionstheoremen der trigonometrischen, hyperbolischen, elliptischen Funktionen auftretenden binären Ausdrücke u. a. m.

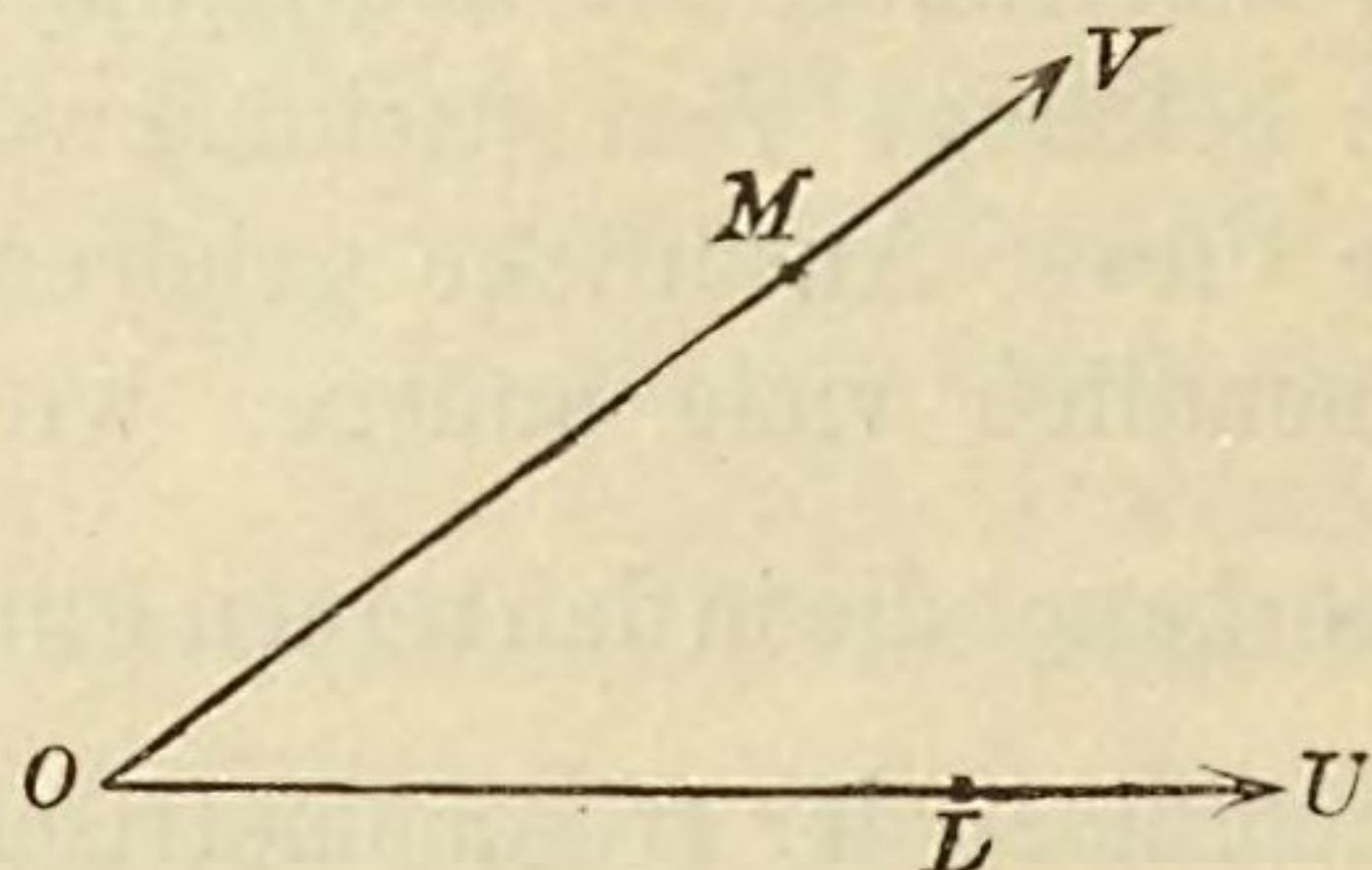
Das charakteristische Merkmal, durch welches unter allen solchen Ausdrücken der Summe eine besondere Stellung angewiesen wird, ist dies, dass der Zuwachs, welchen eine Grösse durch additive Verbindung mit einer zweiten erfährt, von dem ursprünglichen Werte völlig unabhängig ist, während für den durch irgend eine andere associative Verbindung geschaffenen Zuwachs eine solche Unabhängigkeit nicht besteht. Beispielsweise hat der Zuwachs von xy gegen x die von x abhängige Grösse $x(y-1)$. Es findet dies auch darin seinen Ausdruck, dass der von einer associativen Funktion $P(xy)$ nach dem zweiten Argument y genommene Differentialquotient für $P(xy) = x + y$ einen constanten Wert (*Eins*), für jede andere solche Funktion einen von x abhängigen Wert besitzt.

Dieses für die Summe charakteristische Moment ermöglicht nun eine einfache geometrische Deutung der Addition in der Weise, dass man sagt: eine Grösse zu einer zweiten addiren, heisst sie dergestalt zu dieser fügen, dass die Anfügung an allen Stellen in ganz gleicher, von der Wahl der Stelle völlig unabhängiger Weise vor sich geht.

Daraus ergibt sich zunächst die Addition zweier reellen, d. h. gleichartigen, als Linienstücke in derselben Grundrichtung auftretenden Strecken, diese Addition besteht in der Verschiebung der einen Strecke unter Festhaltung der gemeinsamen Grundrichtung bis zu dem Platze, wo ihr Anfangspunkt mit dem Endpunkte der zweiten Strecke zusammenfällt.

Es fragt sich nun, was es heisst, zu einer reellen Grösse eine mit dem Factor i behaftete hinzuzufügen, die Beantwortung dieser Frage ist nur möglich, nachdem die Multiplication mit dem genannten Factor eine gehörige geometrische Deutung gefunden hat, die natürlich nur in den ganz allgemeinen in diesem Abschnitt festgehaltenen Voraussetzungen über die Natur des Raumes wurzeln darf.

Fig. 10.



Zu diesem Zwecke denke man sich zwei von demselben Punkte O ausgehende unter beliebigem Winkel sich gegeneinander neigende Gerade OU und OV , man bestimme ferner auf diesen beliebige Punkte in der Art, dass die von O um gleiche Strecken entfernten Punkte beider Linien, wie z. B. L und M sich entsprechen und drücke diesen Zusammenhang durch die Gleichung aus

$$(32) \dots\dots\dots OM = f(OL).$$

Diese Gleichung bleibt bestehen, wenn man die beiden Strecken OM und OL gleichzeitig auf die p -fache Grösse bringt, sie behält auch ihre Richtigkeit, wenn man das Ergebnis der eben gedachten Operation beiderseits durch q dividirt, also schliesslich sowohl OM als OL mit dem ganz beliebigen Factor $\frac{p}{q} = \lambda$ multiplicirt.

Wählt man nun als Grundlage der Betrachtung auf der Geraden OU eine beliebige Strecke, die man als *Einheit* bezeichnet, etwa die in der Figur angegebene Strecke OL , so ist jede andere Strecke der Geraden OU in der Form $\lambda \cdot 1$ enthalten, während die correspondirende Strecke der Linie OV sich in der Form des Products $\lambda \cdot OM = \lambda \cdot f(OL) = \lambda \cdot f(1) = h \cdot \lambda$ darstellt, unter h eine von der gegenseitigen Lage der Linien OU und OV , also dem Winkel UOV abhängige Constante verstanden.

Ist dieser Winkel ein gestreckter, so besteht zwischen den auf beiden Linien auftretenden Strecken ein Unterschied hinsichtlich des Vorzeichens, während insbesondere der constante Factor

$OM = -OL = -1$ ist, d. h. alle negativen Grössen lassen sich als Producte aus den entsprechenden positiven Grössen und dem Factor (-1) ansehen.

Hat aber der Winkel OUV die Grösse eines Rechten, so ergibt sich der Wert der zu ihm gehörenden Constante $h = f(1)$ durch die Betrachtung, dass eine zweimalige Multiplication mit derselben den Factor (-1) liefert, woraus für sie selber der Wert $\sqrt{-1} = i$ resultirt.

Auf Grund dieser Betrachtungen ist man berechtigt, als geometrische Darstellung des Ausdrucks $a + ib$ die gegenseitig rechtwinklige Aneinanderfügung zweier Strecken von den Längen a und b anzusehen, ohne dass an dem Endergebnis dieser Operation durch die Reihenfolge bei der Verwendung beider Strecken etwas geändert würde, wenn nur jede derselben in dem ihr von vornherein beiwohnenden Sinne verwendet wird. Wie sich daraus die Existenz des in der Figur 9 dargestellten Vierecks $OAJB$ und damit die Grundlage der euklidischen Geometrie ergibt, ist bereits vorher in ausreichender Weise erörtert worden.

Ich wiederhole ausdrücklich, dass dieser Formelbetrachtung an sich gar keine selbständige Beweiskraft beiwohnt, weil in ihr die Entscheidung durch lauter Momente bewirkt wird, welche nicht aus der algebraischen Formel selbst, sondern aus deren anschaulicher Grundlage ihre Berechtigung herleiten. Die Characterisirung der Summe durch die Unveränderlichkeit des Zuwachses, den eine veränderliche Grösse bei der Addition einer Constanten erfährt, hat ohne anschauliche Unterlage gar keine Bedeutung, in ihr prägt sich im Grunde gar nichts anderes aus, als die gegenseitige Unabhängigkeit der verschiedenen Abmessungen, durch die ein Punkt im Raume seine Bestimmung findet, oder mit anderen Worten: diese Bestimmung ist eben weiter nichts, als der anschauliche Inhalt des allgemeinen, auf reelle, wie imaginäre Grössen gleichmässig anwendbaren Summenbegriffs.

Einer gehörigen Erläuterung bedarf auch der Begriff der Multiplication, beziehungsweise der des Products, welcher in der obigen Formel deduction thatsächlich in doppelter Art zur Verwendung gelangt ist, insofern nämlich der Factor λ , welcher seiner Herleitung nach eine *reelle positive* Zahl war, mit dem concreten Factor h , für welchen sich *negative* und *imaginäre* Werte ergaben, als gleichwertig behandelt wurde.

Um die allerdings vorhandene innere Berechtigung dieser Behandlung einzusehen, fasse man zunächst die durch die Figur 10 dargestellte Situation noch einmal in's Auge. Trägt man auf der Linie OU die beiden Strecken a und b von O aus ab, und bezeichnet die correspondirenden auf OV gelegenen Strecken in Gemässheit der an die Figur 10 geknüpften Betrachtungen mit $f(a)$ und $f(b)$, so steht die auf OV durch Addition von $f(a)$ und $f(b)$ erhaltene Strecke zu der auf OU gelegenen Strecke $a+b$ in derselben Beziehung, die zwischen den correspondirenden Strecken beider Linien überhaupt herrscht, d. h. es gilt die Gleichung

$$(33) \dots\dots f(a) + f(b) = f(a+b).$$

Für das mit dem reellen Faktor λ behaftete Produkt $\lambda \cdot a$ kann man aber ebenfalls die aus der Natur seiner Bildung sofort einzusehende Gleichung aufstellen

$$(34) \dots\dots \lambda \cdot a + \lambda \cdot b = \lambda(a+b).$$

Die übereinstimmende Form beider Gleichungen lässt erkennen, dass das Product $\lambda \cdot a$ mit der durch die Formel (33) definirten Funktion in der That eine innere Verwandtschaft besitzt, obwohl der in dieser Funktion steckende Multiplicator den Charakter der reellen positiven Grösse nicht mehr aufweist.

Gerade diese Form des Products mit negativem und namentlich mit imaginärem Factor ist aber von der erheblichsten Bedeutung, vermöge dieser Form kommt dem Begriff des Products, obwohl derselbe — wie die Gleichungen (33) und (34), beziehungsweise die Definition des Factors λ zeigen — nur mit Hülfe der Addition definirt werden kann, neben dem Begriff der Summe noch eine selbständige Bedeutung zu. Das Product mit reellem Multiplicator würde immer nur die Bedeutung eines abgekürzten Ausdrucks für das Ergebnis der wiederholten Aneinanderfügung von lauter einander gleichen Grössen besitzen. Das Product mit imaginärem, beziehungsweise complexem Factor repräsentirt eine Grösse, die durch blosses additives Operiren mit dem in diesem Product enthaltenen Multiplicandus niemals zu Stande gebracht werden kann.

Summe und *Product* sind die Repräsentanten der beiden Auffassungen, deren die Ebene (beziehungsweise der Raum) als *Punkt-* und als *Liniengebilde* fähig ist; die wiederholte *Addition* einer Grösse zu sich selbst ist der algebraische Ausdruck der *Verschiebung* eines

Punktes in derselben Geraden, die *Multiplication* mit dem complexen, von der Grösse eines Winkels, (UOV in Fig. 10.) abhängigen Factor h repräsentirt die geometrische Operation der *Drehung* einer Geraden im Ganzen. Die Möglichkeit, eine beliebige Zahl von einander gleichen Drehungen zu einer Gesamtdrehung zusammenzufassen, und vermöge dessen eine grössere Drehung in eine beliebig geordnete Folge von Teildrehungen wechselnder Grösse aufzulösen entspricht dabei dem *associativen* Character, welcher der Operation des Multiplicirens ebenso wie der des Addirens zukommt.

Zwei von einander unabhängige Abmessungen bestimmen die Gesamtheit der Punkte einer Ebene, aber das System der als Träger der einen Abmessung dienenden Geraden kann aus dem die andere Abmessung vermittelnden Liniensystem durch Drehung erhalten werden. Das heisst nichts anderes, als dies, dass jede Lagenveränderung in der Ebene und mithin (wie die ganze Darstellung dieses Abschnitts zeigt) auch im Raume durch Combination von Verschiebung und Drehung zu Stande gebracht werden kann. Der algebraische Ausdruck dieses Sachverhalts ist die Erscheinung, dass jeder mathematische Ausdruck — er heisse wie er wolle — auf der Verwendung der beiden associativen Grundfunctionen, der Summe und des Products beruht — alle in solchem Ausdruck etwa noch auftretenden Bestimmungselemente sind ja nur mit Hülfe jener beiden Grundbegriffe überhaupt definirbar.

Drehung und Verschiebung sind Bewegungen von ganz verschiedener Art, aber diese Ungleichartigkeit ist von der grössten Bedeutung, in der Möglichkeit, beide zu einander, oder eine gewisse Combination beider mit einer beliebigen anderen Combination aus ihnen in eine gegenseitige Beziehung zu setzen, in dieser Möglichkeit liegt der Ursprung der Fruchtbarkeit, welche dem tiefsten und wichtigsten Begriff der Mathematik, dem der *Funktion* beiwohnt. Ohne diese Ungleichartigkeit der beiden Auffassungen vom Raume, als Punktinbegriff und als Linieninbegriff, beziehungsweise der beide Auffassungen algebraisch begleitenden Begriffe der Addition und der Multiplication würde die ganze Funktionentheorie in der Luft stehen. Es ist nützlich zu constatiren, dass auch dieses Gebiet der mathematischen Forschung seine letzten und tiefsten Wurzeln in der Raumanschauung besitzt.

Bei der eigenartigen Bedeutung, welche die Drehung im Raume neben der Verschiebung beansprucht, ist es nur wahrscheinlich, dass aus der Verwendung derselben als einer Grundbewegung ebenfalls ein Mittel zur Ergründung der inneren Structur des Raumes gewonnen werden wird. Diese Wahrscheinlichkeit steigert sich zur Gewissheit, wenn man erwägt, dass die an einer zusammengesetzten Bewegung gleichzeitig beteiligten Drehungen und Verschiebungen gegenseitig nicht minder unabhängig sein müssen, als es die Verschiebungen nach den Grundcoordinatenrichtungen unter einander sind. Es folgt dies eigentlich schon aus dem wesentlich verschiedenen Charakter beider Bewegungsarten, man kann es aber auch direct einsehen.

Denn verschiebt man auf der Geraden OU irgend einen Punkt von der Stelle A bis an die Stelle B , dreht dann die ganze Linie in die Lage OV , schiebt in dieser Lage den gedachten Punkt nach A zurück und bringt die Linie durch Zurückdrehung in die frühere Lage OU , so erhält man den ursprünglich vorhanden gewesenen Zustand, in dem jede der beiden Grundbewegungen für sich durch die entgegengesetzte Bewegung wieder aufgehoben worden ist. Auch ist es ganz klar, dass die Ordnung, in welcher die Aufhebung der einen Bewegung erfolgt, durch die bei Aufhebung der anderen beobachtete Ordnung in keiner Weise beeinflusst wird; jede der beiden Grundbewegungen, wie der sie rückgängig machenden Operationen kann für sich in eine beliebige Anzahl von Teilvorgängen zerlegt werden (wobei der associative Character der in diesen beiden Bewegungsarten versinnlichten algebraischen Ausdrücke zur Geltung kommt).

Beide Bewegungsarten sind demnach von einander völlig unabhängig, was man nun zu einem directen Beweise für die Richtigkeit der euklidischen Raumanschauung in folgender Art verwenden kann.

Bewegt man eine beliebige Strecke auf dem Umfange eines Dreiecks (oder allgemeiner dem eines geradlinigen ebenen n -Ecks) immer in demselben Sinne, schiebend auf den Seiten der Figur von einer Ecke nach der nächsten hin, und drehend, wenn man von einer Seite auf die folgende übergeht, so gelangt jene Strecke zuletzt in die alte Lage, nachdem sie sich im Ganzen um einen Betrag gedreht hat, welcher der Summe der Aussenwinkel jener Figur gleich ist. Da aber, wie gesagt, die Drehung von der Verschiebung gänzlich unabhängig ist, so kann es auf die Grösse

dieser Drehung keinen Einfluss ausüben, dass während derselben eine Reihe von Verschiebungen vorgenommen worden ist, diese Grösse muss notwendig den Wert besitzen, den sie auch dann besitzen würde, wenn gar keine Verschiebung stattgefunden hätte, also den Wert einer vollen Drehung. Daraus ergibt sich als Summe der Aussenwinkel an jener Figur der Betrag von vier Rechten, vermöge dessen wieder die Summe der Innenwinkel sich für das Dreieck auf zwei Rechte, für das n -Eck auf $(2n-4)$ Rechte stellt, d. i. die Grundlage der euklidischen Geometrie.

Es ist — ich möchte sagen — der Fluch der mathematischen Beweisführung, dass durch den wuchtigen Druck des Formelapparats, mit dem sie arbeitet, nur allzuleicht die sachliche Bedeutung der ganzen Argumentation in den Hintergrund gedrängt wird. Für diese allgemeine, bereits mehrfach erwähnte Erscheinung bietet auch der Satz von der Winkelsumme des ebenen Dreiecks eine auffallende Bestätigung. Denn diese Summe ist allmählich ein rein algebraischer Begriff, für die Rechnung, wie für das Bewusstsein geradezu eine Summe von Gradzahlen geworden, deren reeller Inhalt fast ganz übersehen wird.

Ohne solche rein formelle Auffassung wäre es beinahe undenkbar, dass die Idee der Abweichung dieser Summe von zwei Rechten jemals ernstlich in Frage gekommen, dass die Existenz einer Figur, wie des geradlinigen Dreiecks mit drei unendlich langen, sich asymptotisch nähernden Seiten der Discussion überhaupt für fähig erachtet worden wäre. Solche formelle Auffassung hat eine gewisse Berechtigung für die krummlinigen Gebilde, für die die Winkelsumme nicht den gesamten Betrag der bei Umschreitung der Figur sich vollziehenden Drehung repräsentirt, aber auch da ist sie doch nur möglich unter fortwährender Anlehnung an die anschauliche Auffassung vom Begriffe des Winkels, der durch die Betrachtung der Lagenbeziehungen von geraden Linien (meinetwegen auch Linienelementen, die ja immer als gerade angesehen werden) überhaupt erst gewonnen worden ist.

Für geradlinige ebene Gebilde ist die Winkelsumme thatsächlich nichts anderes als der Gesamtbetrag der bei Umwanderung des Gebildes vollführten Drehung, zu dessen Feststellung die sich drehende Linie an alle die Punkte der Reihe nach hingeschoben werden muss, an welchen die durch die einzelnen Bestandteile der

Winkelsumme repräsentirten Drehungen stattfinden. Dass an diesem gesamten Drehungsergebnis durch die bei dem ganzen Vorgang gleichzeitig auftretende, aber von der Drehung gänzlich unabhängige, mit ihr in keiner Weise concurrirende Verschiebung nichts geändert werden kann, das ist der eigentliche Inhalt der euklidischen Sätze von der Winkelsumme im Dreieck, beziehungsweise im geradlinigen ebenen Vieleck überhaupt.

Sollte dies nach den eben gegebenen Darlegungen noch einer Bestätigung bedürfen, so würde solche durch die Betrachtung der abweichend gestalteten Polygone geliefert werden. Die Differenz zwischen der Winkelsumme des *ebenen* Curvenpolygons und der des entsprechenden geradlinigen Vierecks erklärt sich vollständig durch den Umstand, dass die Bewegung auf den Seiten jenes Polygons keine reine, sondern eine mit gleichzeitiger Drehung behaftete Verschiebung vorstellt. Bei den *nicht in eine Ebene fallenden* Vielecken kommt noch das Moment hinzu, dass die durch die Aussenwinkel der Figur, beziehungsweise die Krümmungen der Polygonseiten repräsentirten Drehungen sich *nicht* zu einer stetigen Drehung um dieselbe Axe summiren lassen. Aber die Gesamtheit dieser Drehungen ergibt auch hier, wenn sie nach der durch die Figur selbst vorgeschriebenen Reihenfolge, eine jede in einer zu ihrer eigentlichen Rotationsaxe senkrechten Ebene, sämtlich *an demselben Punkte* vorgenommen werden, notwendig eine Rückkehr in die ursprüngliche Lage.

Als ein Hinweis aus dem zu unberechtigter Herrschaft gelangten Formalismus heraus auf den sachlichen Inhalt des geometrischen Systems hat darum auch die an letzter Stelle gegebene Argumentation ihre Bedeutung, obwohl die Widerlegung der nicht-euklidischen Theorie der Unterstützung von dieser neuen Seite nicht erst bedurfte. Darum hat auch diese Beweisführung doch, wie ich hoffe, ihre Berechtigung unter den Momenten, auf Grund deren sich als Schlussergebnis der ganzen vorliegenden Untersuchung der Satz aussprechen lässt:

Es gibt nur eine einzige selbständige, aus der Natur des Raumbegriffes selbst herzuleitende, Geometrie, nämlich die auf die euklidischen Voraussetzungen gegründete Geometrie des dreifach ausgedehnten, allseitig unendlichen Raumes.

Anmerkungen.

¹⁾ *Beltrami, Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea.* Giornale di Matematiche, tomo VI, 1868. (Die Anführungen aus dieser Schrift beziehen sich sämtlich auf die von *Hoüel* besorgte französische Übersetzung in den *Annales de l'Ecole Normale supérieure*, tome VI, 1869, p. 251—288.)

²⁾ *Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Habilitationsschrift, vorgelesen der philosophischen Facultät der Universität Göttingen am 10. Juni 1854. (*Bernhard Riemanns Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, S. 254—269).

³⁾ *Beltrami, Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante.* Annali di Matematica pura ed applicata. Serio II Tomo II Fasc. III. (Auch hier beziehen sich die Anführungen auf die *Hoüelsche* Übersetzung in dem unter Anm. 1) genannten Bande, p. 347—375).

⁴⁾ Von *Helmholtz* kommen hier zwei Abhandlungen in Betracht, nämlich A. *Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen.* (Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität (zu Göttingen) aus dem Jahre 1868, No. 9, Juni 3, S. 193—221.)

B. *Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome.* Vortrag, gehalten im Docentenverein zu Heidelberg im Jahre 1870. (*Vorträge und Reden von Hermann von Helmholtz*, zweiter Band, S. 1—34.)

⁵⁾ *Ann. de l'E. N.*, p. 253.

⁶⁾ Selbstverständlich besteht diese Unmöglichkeit nur für die *nichteuklidische*, nicht für die *euklidische* Geometrie.

⁷⁾ Die associative Natur der *Formeln* dient vielfach nur zur Bestätigung, nicht zum Beweise der aufgestellten Behauptungen. Sie hat überhaupt teilweise nur den Wert eines negativen Kriteriums, wie die Betrachtung des bei der Gleichung (1) verwendeten Coordinatensystems zeigt. Obwohl bei der Bestimmung eines Punktes auf die dort angegebene Weise die Coordinaten x und y nicht einmal mit einander vertauscht werden können, ergibt sich für den Abstand s des dadurch bestimmten Punktes vom Coordinatenanfang die Gleichung:

$$\cos \frac{s}{k} = \cos \frac{x}{k} \cos \frac{y}{k},$$

und damit der Wert von s als eine nicht nur commutative, sondern sogar associative Funktion von x und y .

⁸⁾ *Helmholtz, Vorträge*, S. 15: „Das Axiom von den Parallelen scheidet die Ebene von der Pseudosphäre.“

⁹⁾ *Kant, Kritik der reinen Vernunft, Einleitung V.* S. 44 der Hartensteinschen Ausgabe.

¹⁰⁾ *Helmholtz, Vorträge*, S. 5.

¹¹⁾ Dgl., S. 15—16.

¹²⁾ Dgl., S. 15.

¹³⁾ Dgl., S. 16.

¹⁴⁾ Dgl., S. 16.

¹⁵⁾ Auch die Zählung der zeitlich sich folgenden Grössen ist doch nur dadurch möglich, dass man durch das Gedächtnis befähigt ist, die Vergangen-

heit zugleich mit der Gegenwart im eingebildeten Nebeneinander zu überschauen.

¹⁶⁾ *Riemann*, S. 260.

¹⁷⁾ *Riemann*, S. 260.

Für die Richtigkeit der im Text gegebenen Interpretation von *Riemanns* Meinung lassen sich auch noch einige andere Stellen seiner Abhandlung anführen:

Zuerst folgender Passus aus Abschnitt III, 3 (a. a. O. S. 267)

„Setzt man voraus, dass die Körper unabhängig vom Ort existiren, so ist „das Krümmungsmaass überall constant, und es folgt dann aus den astro- „nomischen Messungen, dass es nicht von Null verschieden sein kann.“

Der Wortlaut lässt nicht den geringsten Zweifel, dass Riemann hier von dem uns in Wirklichkeit angehenden, den euklidischen Annahmen entsprechenden Raum spricht. Diesen characterisirt er mithin dadurch, dass in ihm das Krümmungsmaass, d. i. die Grösse α der unter No. (10) auf S. 35 mitgetheilten Formel den Wert *Null* hat. Hieraus folgt unmittelbar, dass der *euklidische* Raum mit dem durch die Gleichungen (9) des Textes characterisirten *ebenen* Raum identisch ist.

An zweiter Stelle verweise ich auf Abschnitt III, 1 der Riemannschen Abhandlung (a. a. O. S. 265). Dort identificirt Riemann „Ebenheit in den kleinsten Theilen“ mit dem Zusammentreffen von „Unabhängigkeit der *Linien* von der Lage und Darstellbarkeit des Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades“, er verlangt also für diese Ebenheit im Unendlichkleinen *nicht*, dass dieser Differentialausdruck eine Quadratsumme sei. Dann fährt er fort:

„ Die zur Herstellung dieses Zustandes erforderlichen Bedingungen „lassen sich so ausdrücken, dass das Krümmungsmaass in jedem Punkte „in drei Flächenrichtungen = 0 ist, und es sind daher die Maassverhältnisse „des Raumes bestimmt, wenn die Winkelsumme im Dreieck allenthalben „gleich zwei Rechten ist. — Setzt man aber, wie *Euklid*, *nicht blos* eine „von der Lage unabhängige Existenz der *Linien*, sondern auch der *Körper* „voraus, so folgt, dass das Krümmungsmaass allenthalben constant ist, „und es ist dann in allen Dreiecken die Winkelsumme bestimmt, wenn sie „in Einem bestimmt ist.“

Bemerkenswert in dieser letzteren Stelle ist auch die in ihr hervortretende Unklarheit. Im zweiten, die Natur des Raumes noch genauer präcisirenden Absatz treten auffallender Weise für das Krümmungsmaass und die Dreieckswinkelsumme statt der ihnen vorher erteilten speziellen Werte (*Null* und *zwei Rechte*) wieder unbestimmtere Angaben auf. Ich erblicke in dieser Unklarheit nur ein Zeichen dafür, wie unfruchtbar das Verfahren ist, welches die Untersuchung der Grundlagen der Geometrie auf Infinitesimalbetrachtungen basiren will. (Vgl. hiezu den Schluss vom dritten Abschnitt der vorliegenden Schrift).

¹⁸⁾ In einer Anmerkung zu der Riemannschen Abhandlung *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill^{ma} Academia Parisiensi propositae* findet sich eine von *Dedekind* herrührende Ausführung des Riemannschen Gedankenganges. (*Riem. Werke*, S. 384—391.)

¹⁹⁾ *Riemann*, S. 261.

²⁰⁾ Dgl., S. 264.

²¹⁾ Ebendasselbst.

²²⁾ *Riemann*, S. 257—258.

²³⁾ Überschrift des Abschnittes II der *Riemann'schen* Abhandlung, a. a. O. S. 258.

²⁴⁾ *Riemann*, S. 264.

²⁵⁾ *Ann. de l'E. N.*, p. 359.

²⁶⁾ *Helmholtz* sagt in seinem Heidelberger Vortrag (a. a. O. S. 18), dass *Beltrami* den pseudosphärischen Raum im Innern einer Kugel des euklidischen Raumes abbilde, doch ist dies nur insofern zutreffend, als man die analytischen Betrachtungen seines zweiten ganz allgemein vom n -fach ausgedehnten Raume handelnden Aufsatzes bei der Anwendung auf den dreidimensionalen Raum so interpretieren kann, wie *Helmholtz* angibt. *Beltrami* selbst gibt eine entsprechende geometrische Deutung nur für die zweidimensionalen pseudosphärischen Gebilde, selbstverständlich unter Anwendung des euklidischen Kreises (in seiner ersten Abhandlung).

²⁷⁾ *Ann. de l'E. N.*, p. 284—288.

²⁸⁾ Dgl., S. 355—358.

²⁹⁾ Dgl., S. 287.

³⁰⁾ Die hier gegebene Form ist eine leichte Umformung des von *Beltrami* selbst (a. a. O. S. 348) gegebenen, weiterhin unter No. (27) mitgeteilten Ausdrucks.

³¹⁾ *Ann. de l'E. N.*, p. 355.

³²⁾ Als Beweise hiefür dienen besonders die Paragraphen 2 und 3 des ersten, der Schluss vom Paragraph 2 des zweiten Abschnittes der *Riemann'schen* Abhandlung (a. a. O. S. 257—258 und 262).

³³⁾ *Ann. de l'E. N.* p. 253.

³⁴⁾ Ebendasselbst.

³⁵⁾ Wie sehr sich *Beltrami* gegen übertriebene Auslegungen seiner Rechnung verwahrt, geht auch noch aus einigen anderen bemerkenswerten Äusserungen hervor. So sagt er am Anfange seiner zweiten Abhandlung (a. a. O. S. 348) ausdrücklich, dass es dem Leser vollständig überlassen bleibt, den weiterhin folgenden Deductionen eine *rein analytische* Bedeutung beizulegen. Es harmonirt dies auch durchaus mit den von ihm im Eingange und am Schlusse (Abschnitt VI) seines ersten Aufsatzes (a. a. O. p. 251—252 und p. 279—282) kundgegebenen Ansichten. Dort bezweifelt er nämlich ausdrücklich die Möglichkeit, seine von ihm für zweidimensionale Gebilde gegebene reale Deutung der nichteuklidischen Geometrie auf den Fall von mehr als zwei Raumausdehnungen zu übertragen.

³⁶⁾ *Helmholtz*, *Vorträge*, S. 19.

³⁷⁾ *Göttinger Nachrichten*, S. 193—194.

³⁸⁾ Dgl., S. 200.

³⁹⁾ Dgl., S. 201.

⁴⁰⁾ Dgl., S. 218.

⁴¹⁾ Ebendasselbst.

⁴²⁾ Dgl., S. 213.

⁴³⁾ Dgl., S. 214.

⁴⁴⁾ Die hier gegebene Modification der *Helmholtz'schen* Rechnung deckt sich im Wesentlichen mit der Darstellung, welche diese Rechnung bei *Frisch-auf* findet (*Elemente der absoluten Geometrie* [Leipzig, Teubner 1876], Art.

118—121, S. 122—129). Allerdings besteht wohl insofern ein Unterschied gegen die in der vorliegenden Schrift zur Geltung gebrachte Auffassung, als Frisch auf nirgends hervorhebt, dass die von ihm gegebene Darstellung eine *wesentliche Abänderung* der eigentlichen Helmholtzschen Beweisführung und ihres Ergebnisses bildet. Auch begeht Frisch auf den Fehler, die von ihm hergeleitete Schlussform, (welche mit der Gleichung Nr. (25) der vorliegenden Schrift auf Eins herauskommt) für ein Kennzeichen der Ebenheit in den kleinsten Teilen zu erklären, da doch die Riemannsche Abhandlung keinen Zweifel lässt, dass die eben gedachte Gleichung den überhaupt ebenen, d. h. euklidischen Raum characterisiren soll. Es ist dies eine der Unklarheiten, die als natürliche Folgen des ganzen mit dem Linienelement operirenden Verfahrens zu betrachten sind, eine augenfällige Bestätigung für die im Text der vorliegenden Schrift (S. 48—51) an diesem Verfahren geübte Kritik.

⁴⁵⁾ Man kann auch noch an einer anderen Stelle einsetzen, wenn man die *Helmholtzsche* Deduction richtig stellen will. Im § 3 seiner Abhandlung (a. a. O. S. 215) macht Helmholtz eine Bemerkung des Sinnes, dass man jede beliebige Drehung aus *zwei* Fundamentaldrehungen zusammensetzen könne, die Absicht diesen Gedanken zur Ausführung zu bringen, scheint ihn zu dem inconsequenten Verfahren, von dem im Text die Rede ist, verführt zu haben. Man kann indessen auch diesen Gedanken in correcter Weise durchführen, wenn man sich an die von Helmholtz selbst unter Nr. 5 b (a. a. O. S. 211) gegebene Formel hält. Diese für die Drehung innerhalb einer Ebene geltende Formel lautet, wenn man gewissen Grössen die ihnen gleich nachher von Helmholtz zugewiesenen Werte erteilt,

$$(\lambda_0 x + \mu_0 y + \nu_0 z)^2 + (\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 z)^2 = A^2,$$

indem sowohl die Grössen x, y, z , als auch A gewissen Differentialen proportional sind. Ersetzt man daher die beiden Klammerausdrücke durch die ihnen proportionalen Linienelemente $d\xi$ und $d\eta$ und die Grösse A durch das ihr proportionale Linienelement der Ebene $d\sigma$, so hat man

$$d\xi^2 + d\eta^2 = d\sigma^2$$

und damit für $d\sigma$ einen *associativen* Ausdruck, der bei Hinzunahme des Differentials $d\xi$ ohne Weiteres zu der Gleichung

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\xi^2 = dS^2$$

führt.

⁴⁶⁾ Als Beispiele unter anderen mögen die Formelsysteme (1), (1a) und (3) der ersten *Helmholtzschen* Abhandlung dienen.

⁴⁷⁾ *Riemann*, II, 3 (S. 263).

⁴⁸⁾ Dgl., II, 4 (S. 263—264).

⁴⁹⁾ *Ann. de l'E. N.*, p. 282.

⁵⁰⁾ Dgl., p. 371. —

Hier zieht *Beltrami* aus der für die „Grenzfläche“ von ihm aufgestellten Form des Linienelements den Schluss, dass diese Fläche die Krümmung *Null* haben müsse, weil sie vermöge der gedachten Form mit der euklidischen Ebene zur Deckung gebracht werden könne. [La forme de cet élément montre que toute horisphère est une surface de courbure *nulle* (c'est-à-dire superposable au plan euclidien par voie de simple flexion sans extension), puisque son élément linéaire est de la forme $ds = \text{const.} \cdot \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2}$]

Diese Bemerkung repräsentirt eine der mannigfachen Unklarheiten, an denen die nichteuklidische Theorie so reich ist. Erstens macht sie den Eindruck, als ob Beltrami, wie Helmholtz die Ebene für ein die euklidische Geometrie von der nichteuklidischen unterscheidendes Gebilde hielte (vgl. hiezu S. 31 der vorliegenden Schrift), zweitens steht die Angabe, dass die Krümmung der Grenzfläche den Wert *Null* habe, mit der nichteuklidischen Theorie in directem Widerspruch, insofern diese der gedachten Krümmung vielmehr den Wert $\frac{1}{k^2}$ zuspricht, drittens ist die von Beltrami aufgestellte Angabe für das Linienelement auch höchst anfechtbar; denn er folgert sie aus dem allgemeineren Wert

$$ds = R \frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + d\eta_2^2}}{\eta}$$

durch die Annahme $\eta=0$, was den soeben mitgetheilten Ausdruck

$$ds = \text{const} \cdot \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2}$$

doch nur dann rechtfertigen würde, wenn auch $R=0$ wäre. Es ist aber vielmehr für R höchstens der Grenzwert ∞ anzunehmen.

⁵¹⁾ *Ann. de l'E. N.*, p. 369.

⁵²⁾ *Dgl.*, p. 374—375.

⁵³⁾ *Dgl.*, p. 348.

⁵⁴⁾ *Dgl.*, p. 362.

⁵⁵⁾ *Cranz*, in seiner Schrift „*Gemeinverständliches über die sogenannte vierte Dimension*“ (Virchow-Holtzendorffs Sammlung, Neue Folge. Fünfte Serie. Heft 112/113).

⁵⁶⁾ S. d. vorstehend citirte *Cranzsche* Schrift.

⁵⁷⁾ *Helmholtz, Vorträge*, S. 8.

⁵⁸⁾ *Dgl.*, S. 15.

⁵⁹⁾ *Dgl.*, S. 7.

⁶⁰⁾ *Riemann*, S. 254—255.

⁶¹⁾ *Helmholtz, Vorträge*, S. 29—30.

Die *Helmholtzschen* Ausführungen lauten wörtlich wie folgt:

„Die geometrischen Axiome sprechen also gar nicht über Verhältnisse des „Raumes allein, sondern gleichzeitig auch über das mechanische Verhalten „unserer festesten Körper bei Bewegungen. Man könnte freilich auch „den Begriff des festen geometrischen Raumgebildes als einen transcen- „dentalen Begriff auffassen, der unabhängig von wirklichen Erfahrungen „gebildet wäre, und dem diese nicht notwendig zu entsprechen brauchen, „wie ja unsere Naturkörper ganz rein und ungestört nicht einmal den- „jenigen Begriffen entsprechen, die wir auf dem Wege der Induction von „ihnen abstrahirt haben. Unter Hinzunahme eines solchen nur als Ideal „concipirten Begriffs der Festigkeit könnte dann ein strenger Kantianer „allerdings die geometrischen Axiome als a priori durch transcendentale „Anschauung gegebene Sätze betrachten, die durch keine Erfahrung bestätigt „oder widerlegt werden könnten, weil man erst nach ihnen zu entscheiden „hätte, ob irgend welche Naturkörper als feste Körper zu betrachten seien. „Dann müssten wir aber behaupten, dass unter dieser Auf-

„fassung die geometrischen Axiome gar keine synthetischen „Sätze im Sinne Kants wären. Denn sie würden dann nur etwas „aussagen, was aus dem Begriffe der zur Messung notwendigen „festen geometrischen Gebilde analytisch folgen würde, da als „feste Gebilde nur solche anerkannt werden könnten, die jenen „Axiomen genügen. — Nehmen wir aber zu den geometrischen Axiomen „noch Sätze hinzu, die sich auf die mechanischen Eigenschaften der Natur- „körper beziehen, wenn auch nur den Satz von der Trägheit, oder den „Satz, dass die mechanischen und physikalischen Eigenschaften der Körper „unter übrigens gleichbleibenden Einflüssen nicht vom Orte, wo sie sich „befinden, abhängen können, dann erhält ein solches System von Sätzen „einen wirklichen Inhalt, der durch Erfahrung bestätigt oder wider- „legt werden, eben deshalb aber auch durch Erfahrung gewonnen werden „kann.“

⁶²⁾ Titel des Abschnitts II der *Riemannschen* Abhandlung (a. a. O. S. 258).

⁶³⁾ *Helmholtz, Vorträge*, S. 30–31.

⁶⁴⁾ Dgl., S. 28–29.

⁶⁵⁾ Dgl., S. 23–24.

⁶⁶⁾ Aus der *transcendentalen* Natur der Anschauung ergibt sich auch, dass von einer „Ungenauigkeit“ derselben in dem Sinne, den *Felix Klein* der natürlichen Anschauung beilegt (siehe dessen Abhandlungen: *Über den allgemeinen Functionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Curve*, *Math. Annalen*, Bd. XXII, S. 249–259, besonders S. 250 und 253, sowie: *Zur nicht-euklidischen Geometrie*, *Math. Ann.* Bd. XXXVII, S. 544–572, besonders den Schlussabschnitt), nicht wohl die Rede sein kann. Wie man „in die“ angeblich „ungenauere Anschauung genaue Aussagen hineinzulegen“ berechtigt sein würde, ohne die Wahrheit zu vergewaltigen, vermag ich übrigens unter keinen Umständen einzusehen.

⁶⁷⁾ *Helmholtz, Vorträge*, S. 24–27.

⁶⁸⁾ Dgl., S. 27–28.

⁶⁹⁾ *Kant, Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte*, § 9–11.

⁷⁰⁾ *Dillmann, die Mathematik die Fackelträgerin einer neuen Zeit*, S. 101.

Vgl. hiezu meine Besprechung dieser übrigens höchst interessanten und gehaltvollen Schrift im *Pädag. Archiv*, XXXII, 1890, S. 268–278.

⁷¹⁾ *Riemann*, III, 2 (S. 266).

⁷²⁾ Ein Beispiel hiefür liefert auch *Beltrami* in der ersten Note zu seiner ersten Abhandlung (a. a. O. S. 283), wo er darlegt, wie man die Formeln der von ihm sogenannten *pseudosphärischen* Geometrie aus denen der *Sphärik* mittels Einführung von imaginären Werten für gewisse reelle Grössen erhalten könne. Diese Beweisführung eignet sich auch *Helmholtz* an in den *Mathematischen Erläuterungen* zu seinem Heidelberger Vortrage (*Helmh. Vorträge*, S. 34), während ein wesentlicher Teil der in seiner ersten Abhandlung gezogenen Schlussfolgerungen ebenfalls nur auf Operationen mit imaginären (oder complexen) Grössen beruht (*Gött. Nachr.*, S. 210–211). Die Zahl der Beispiele aus den Abhandlungen, welche den speziellen Ausbau der neueren Theorien zum Gegenstand haben, ist Legion.



Druckfehler-Berichtigung.

Seite 8, Zeile 2 von oben lies: OL statt OC .

„ 10, „ 20 „ „ „ $k^2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sin \frac{a}{k}} \right) \right)$.

„ 46, „ 3 „ „ „ $\frac{dZ}{d\eta_2}$ statt $\frac{dZ}{d\eta_3}$.

Druck von Max Hoffmann, Leipzig-Reudnitz.



Pietzker, Friedrich

Die Gestaltung des Raumes kritische Untersuchungen über die Grundlagen
der Geometrie ; mit 10 Figuren im Text

Braunschweig 1891

Math.p. 425 k

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651549-1